고등학교

수학 [상]

수악중독

Where Impossible Becomes I'm possible

다항식

1

1. 다항식의 연산
2. 나머지 정리와 인수분해

수악중독

Where Impossible Becomes I'm possible

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

용어정리

단항식 : 숫자 또는 문자들의 곱셈으로만 이루어진 식
다항식 : 단항식 또는 단항식들의 합으로 이루어진 식
항 : 다항식에 포함된 각각의 단항식
계수 : 항에서 문자 부분을 제외한 숫자 부분
상수항 : 문자를 포함하지 않고 숫자만으로 이루어진 항
차수
- **항의 차수** : 하나의 항에서 특정한 문자가 곱해진 개수
- **다항식의 차수** : 다항식에서 차수가 가장 높은 항의 차수

동류항 : 문자의 종류와 차수가 같은 항

▷ x, $-2y$, $3x^2$, $2xy$, $-5x^2y^3$, 4 등은 모두 단항식이다.

▷ 단항식 $4x^3$, $-3x^2$, $2x$, -1 의 합들로 이루어진 $4x^3-3x^2+2x-1$은 다항식이다.

▷ 다항식 $4x^3-3x^2+2x-1$ 에서 $4x^3$, $-3x^2$, $2x$, -1 들을 항이라고 한다.

▷ 다항식 $4x^3-3x^2+2x-1$ 에서 항 $4x^3$, $-3x^2$, $2x$ 들의 계수는 각각 4, -3, 2이다. 이때 -1은 상수항이라고 부른다.

▷ 단항식 $4x^3$, $-3x^2$, $2x$ 의 차수는 각각 3차, 2차, 1차 이다.

▷ 다항식 $4x^3-3x^2+2x-1$ 의 차수는 3차가 되고, x에 대한 3차 다항식이라고 부른다.

▷ 다항식 $4x^3-3x^2+2x-1+5x^3+6x^2-7x$ 에서 $4x^3$과 $5x^3$, $-3x^2$과 $6x^2$, 그리고 $2x$와 $-7x$는 각각 동류항이다.

▷ 다항식 $6x^4+2x^3y^2-2y^3+5x^2-4xy^2+xy-1$ 은 x에 대해서는 4차 다항식, y에 대해서는 3차 다항식, x, y에 대해서는 5차 다항식이 된다.

▷ 다항식 $6x^4+2x^3y^2-2y^3+5x^2-4xy^2+xy-1$ 을 x에 대한 다항식으로 보면 $2x^3y^2$ 항의 계수는 $2y^2$이고, y에 대한 다항식으로 보면 $2x^3y^2$의 계수는 $2x^3$이며, x, y에 관한 다항식으로 보면 $2x^3y^2$의 계수는 2가 된다.

▷ 다항식 $6x^4+2x^3y^2-2y^3+5x^2-4xy^2+xy-1$ 을 x에 대한 다항식으로 보면 상수항은 $-2y^3-1$이고, y에 대한 다항식으로 보면 상수항은 $6x^4+5x^2-1$이 되며, x, y에 대한 다항식으로 보면 상수항은 -1이 된다.

▷ 다항식 $x^3+2x^2y-xy-3x^2y+4xy-x+y-3$에서 $2x^2y$와 $-3x^2y$, $-xy$와 $4xy$는 각각 동류항이다.

다항식의 정리

다항식은 동류항끼리 묶어서 간단히 표현한 후, 다음과 같은 두 가지 방법으로 정리할 수 있다.

- **내림차순** : 한 문자에 대하여 차수가 높은 항에서 차수가 낮은 항 순서로 정리하는 것
- **오름차순** : 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항에서 차수가 높은 항 순서로 정리하는 것

다항식 $2x^2+xy-y^2+3x+2y-5$를

▷ x에 대한 내림차순으로 정리하면 $2x^2+(y+3)x-y^2+2y-5$가 된다.

▷ y에 대한 오름차순으로 정리하면 $(2x^2+3x-5)+(x+2)y-y^2$이 된다.

다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같은 과정으로 계산한다.

(1) 괄호를 풀어 전개한다.

(2) 동류항끼리 묶어서 간단히 정리한다.

(3) 뺄셈의 경우 항의 부호를 바꾸어 덧셈으로 계산한다.

두 다항식 $A=2x^2-x+3$, $B=-4x^2+6x-5$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $3A-B$ (2) $A-2B-(3A-4B)$

(1) $$\begin{aligned}3A-B &= 3(2x^2-x+3)-(-4x^2+6x-5)\\ &= 6x^2-3x+9+(4x^2-6x+5)\\ &= (6x^2+4x^2)-(3x+6x)+(9+5)\\ &= 10x^2-9x+14\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}A-2B-(3A-4B) &= A-2B-3A+4B\\ &= -2A+2B\\ &= -2(2x^2-x+3)+2(-4x^2+6x-5)\\ &= -4x^2+2x-6-8x^2+12x-10\\ &= (-4x^2-8x^2)+(2x+12x)-(6+10)\\ &= -12x^2+14x-16\end{aligned}$$

다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C 에 대하여
(1) 교환법칙 : $A+B=B+A$
(2) 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

세 다항식 $A=2x^2-x+3$, $B=-4x^2+6x-5$, $C=8x^2+7x-9$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $A+B=B+A$ (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(1) $A+B=(2x^2-x+3)+(-4x^2+6x-5)$
$=(2x^2-4x^2)+(-x+6x)+(3-5)$
$=-2x^2+5x-2$

$B+A=(-4x^2+6x-5)+(2x^2-x+3)$
$=(-4x^2+2x^2)+(6x-x)+(-5+3)$
$=-2x^2+5x-2$

(2) $(A+B)+C=(-2x^2+5x-2)+(8x^2+7x-9)$
$=(-2x^2+8x^2)+(5x+7x)+(-2-9)$
$=6x^2+12x-11$

$A+(B+C)=(2x^2-x+3)+\{(-4x^2+6x-5)+(8x^2+7x-9)\}$
$=(2x^2-x+3)+\{(-4x^2+8x^2)+(6x+7x)+(-5-9)\}$
$=(2x^2-x+3)+(4x^2+13x-14)$
$=(2x^2+4x^2)+(-x+13x)+(3-14)$
$=6x^2+12x-11$

02 다항식의 곱셈

지수법칙

임의의 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

다항식의 곱셈

분배법칙과 지수법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 묶어서 정리한다.

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2+x+3) &= x^3+x^2+3x+2x^2+2x+6 \\ &= x^3+3x^2+5x+6\end{aligned}$$

$(x^2-x-1)(2x+3)$을 전개하시오.

$$\begin{aligned}&(x^2-x-1)(2x+3) \\ &= x^2(2x+3)-x(2x+3)-(2x+3) && \text{분배법칙} \\ &= (2x^3+3x^2)-(2x^2+3x)-(2x+3) && \text{분배법칙} \\ &= 2x^3+(3x^2-2x^2)+(-3x-2x)+(-3) && \text{결합법칙} \\ &= 2x^3+x^2-5x-3\end{aligned}$$

다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙 $AB=BA$

(2) 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

(3) 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

세 다항식 $A=x+1, B=x+2$, $C=x+3$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $AB=BA$ (2) $(AB)C=A(BC)$

(3) $A(B+C)=AB+AC$ (4) $(A+B)C=AC+BC$

(1) $AB=(x+1)(x+2)$
$=x^2+2x+x+2$
$=x^2+3x+2$

$BA=(x+2)(x+1)$
$=x^2+x+2x+2$
$=x^2+3x+2$

(2) $(AB)C=\{(x+1)(x+2)\}(x+3)$
$=(x^2+3x+2)(x+3)$
$=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6$
$=x^3+6x^2+11x+6$

$A(BC)=(x+1)\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x+1)(x^2+5x+6)$
$=x^3+5x^2+6x+x^2+5x+6$
$=x^3+6x^2+11x+6$

(3) $A(B+C)=(x+1)(2x+5)$
$=2x^2+5x+2x+5$
$=2x^2+7x+5$

$AB+AC=(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)$
$=x^2+3x+2+x^2+4x+3$
$=2x^2+7x+5$

(4) $(A+B)C=(2x+3)(x+3)$
$=2x^2+6x+3x+9$
$=2x^2+9x+9$

$AC+BC=(x+1)(x+3)+(x+2)(x+3)$
$=x^2+4x+3+x^2+5x+6$
$=2x^2+9x+9$

03 곱셈 공식

곱셈 공식

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$,

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

(8) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

(10) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x-3y)^3$ (2) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(1) $(2x-3y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$
$= 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

(2) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = x^3-(2y)^3 = x^3-8y^3$

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $\quad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $\quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $\quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(5) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(6) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$x=3+2\sqrt{5}$, $y=3-2\sqrt{5}$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}
x^3+y^3 &= (x+y)^3-3x^2y-3xy^2 \\
&= (x+y)^3-3xy(x+y) \\
&= (3+2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5})^3-3(3+2\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5}) \\
&= 6^3-3\times(9-20)\times 6 \\
&= 216+198 \\
&= 414
\end{aligned}$$

04 다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈

다항식을 0이 아닌 다항식으로 나눌 때에는 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

자연수의 나눗셈

$$\begin{array}{r} 25 \\ 3\overline{)77} \\ \underline{6} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

몫 : 25
나머지 : 2

다항식의 나눗셈

$$\begin{array}{r} x\ -2 \\ 2x+1\ \overline{)\ 2x^2-3x+1} \\ \underline{2x^2+\ x} \\ -4x+1 \\ \underline{-4x-2} \\ 3 \end{array}$$

몫 : $x-2$
나머지 : 3

다항식의 나눗셈 $(30+3x^5-x^3)\div(3-2x^2+x^3)$의 몫과 나머지를 구하시오.

$$\begin{array}{r} 3x^2+\ 6x+\ 11 \\ x^3-2x^2+0x+3\ \overline{)\ 3x^5+0x^4-\ x^3+0x^2+\ 0x+\ 30} \\ \underline{3x^5-6x^4+0x^3+9x^2} \\ 6x^4-\ x^3-9x^2 \\ \underline{6x^4-12x^3+0x^2+18x} \\ 11x^3-9x^2-18x+30 \\ \underline{11x^3-22x^2+0x+33} \\ 13x^2-18x-\ 3 \end{array}$$

몫 : $3x^2+6x+11$, 나머지 : $13x^2-18x-3$

조립제법

다항식 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$을 $x-\alpha$와 같은 일차식으로 나눌 때, 계수만을 차례로 나열하여 다음과 같이 계산하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
\alpha & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \cdots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\
\hline
 & a_0 & a_1+\alpha b_0 & a_2+\alpha b_1 & \cdots & a_{n-1}+\alpha b_{n-2} & a_n+\alpha b_{n-1} \\
 & =b_0 & =b_1 & =b_2 & \cdots & =b_{n-1} & =R
\end{array}
$$

몫 $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$,

나머지 $R = a_n + \alpha b_{n-1}$

다항식의 나눗셈

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x + 6 \\
\hline
x-3 & 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2 \\
 & 2x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & x^2 + 3x \\
 & x^2 - 3x \\
\hline
 & 6x + 2 \\
 & 6x - 18 \\
\hline
 & 20
\end{array}
$$

조립제법

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\
 & & + & + & + \\
 & & 3\times② & 3\times① & 3\times⑥ \\
\hline
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 & 2 & 1 & 6 & 20 \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & R
\end{array}
$$

조립제법을 이용하여 $(x^3 - 2x^2 + 5) \div (x+1)$ 의 몫과 나머지를 구하시오.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
 & & -1 & 3 & -3 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & 2
\end{array}
$$

몫 : $x^2 - 3x + 3$

나머지 : 2

다항식의 나눗셈의 성질

다항식 A를 다항식 $B(B \neq 0)$로 나누었을 때 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$$A = BQ + R$$

가 성립한다. 이때, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

다항식 A를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이고 나머지가 $-2x+1$일 때, 다항식 A를 구하여라.

$$\begin{aligned} A &= (x^2+x+1)(x-1)-2x+1 \\ &= x^3-1-2x+1 \\ &= x^3-2x \end{aligned}$$

▷ 다항식 $f(x)$를 $ax+b$ $(a \neq 0)$로 나눌 때, 조립제법을 이용하는 방법

다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, $R(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$f(x) = (ax+b)Q(x) + R(x)$$

이 식을 변형하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x) + R(x) \\ &= \left(x+\frac{b}{a}\right)\{aQ(x)\} + R(x) \end{aligned}$$

이것은 곧 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 몫과 나머지가 각각 $aQ(x)$, $R(x)$ 가 됨을 보여준다.

따라서 $f(x)$를 $ax+b$로 나눈 몫은 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 몫에 $\frac{1}{a}$를 곱하여 구할 수 있고, 나머지는 두 경우가 같아진다.

다항식 $2x^3+x^2-x+5$를 $2x+3$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하시오.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & -1 & 5 \\ & & -3 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+x^2-x+5 &= \left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2 \\ &= (2x+3)(x^2-x+1)+2 \end{aligned}$$

몫 : x^2-x+1, 나머지: 2

01 항등식

항등식

등식에 포함되어 있는 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 그 문자에 대한 항등식이라고 한다.

▷ 등식 $(x-1)(x+1)=x^2-1$ 은 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 등식이 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

▷ 등식 $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ 은 x, y에 어떤 값을 대입하더라도 항상 등식이 성립하므로 x와 y에 대한 항등식이 된다.

▷ 일반적으로 항등식임을 나타내기 위한 표현으로는 'x 값에 관계없이', '임의의 x에 대하여', '모든 x에 대하여', '어떤 x값에 대하여서도' 와 같은 것들이 있다.

항등식의 성질

(1) $ax+b=0$ 이 x에 대한 항등식이면 $a=b=0$ 이다.

(2) $ax+b=cx+d$ 가 x에 대한 항등식이면 $a=c,\ b=d$ 이다.

(3) $ax^2+bx+c=0$ 이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$ 이다.

(4) $ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$ 가 x에 대한 항등식이면 $a=d,\ b=e,\ c=f$이다.

(5) $ax+by+c=0$ 이 $x,\ y$에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$ 이다.

▷ $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이 되려면 $x=0$을 대입해도 $x=1$을 대입해도 등식이 성립해야 한다.

i) $x=0$을 대입하면 $b=0$

ii) $x=1$을 대입하면 $a+b=a+0=0$이므로 $a=0$

▷ $ax+b=cx+d$ 은 $(a-c)x+(b-d)=0$으로 나타낼 수 있고, 이 등식이 x에 대한 항등식이 되려면 (1) 에 의해 $a-c=0,\ b-d=0$ 즉, $a=c,\ b=d$가 되어야 한다.

등식 $ax^2+bx+c=0$ 가 x에 대한 항등식이 되기 위한 조건은 $a=b=c=0$임을 보이시오.

등식 $ax^2+bx+c=0$ 가 x에 대한 항등식이 되려면 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 성립해야 한다.

$x=0$을 대입하면 $c=0$

$x=1$을 대입하면 $a+b+c=a+b=0$ ⇨ $a=b=c=0$

$x=-1$을 대입하면 $a-b+c=a-b=0$

일반적으로 다음이 성립한다.

▷ 등식 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 이 x에 대한 항등식이 되기 위한 조건은 $a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ \cdots,a_{n-1}=0,\ a_n=0$ 이다.

▷ $a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ \cdots,a_{n-1}=0,\ a_n=0$ 이면 등식 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 는 x에 대한 항등식이 된다.

▷ 등식 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ 가 x에 대한 항등식이 되기 위한 조건은 $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_n=b_n$ 이다.

▷ $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_n=b_n$ 이면 등식 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ 는 x에 대한 항등식이 된다.

미정계수법

항등식의 성질을 이용하여 미지의 계수가 포함된 등식이 항등식이 되도록 계수를 결정하는 것을 미정계수법이라고 한다. 미정계수법에는 다음과 같이 두 가지가 있다.

(1) 계수비교법 : 항등식에서는 동류항의 계수가 같음을 이용하여 미정계수를 결정하는 방법

(2) 수치대입법 : 문자에 임의의 값을 대입하여도 등식이 성립하는 항등식의 정의를 이용하여 미정계수를 결정하는 방법

$x^2-3x+2=(x-1)^2+a(x-1)+b$가 x에 대한 항등식이 되도록 a, b의 값을 정하시오.

(1) 계수비교법

$x^2-3x+2=x^2+(a-2)x+1-a+b$

좌변과 우변의 계수를 비교하면 $a=-1$, $b=0$

(2) 수치대입법

$x^2-3x+2=(x-1)^2+a(x-1)+b$ 의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=b$

$\therefore b=0$

양변에 $x=0$을 대입하면 $2=1-a+0$ $\quad\therefore a=-1$

다항식 x^3+ax^2+bx-1를 x^2+2x-1로 나누었을 때 나머지가 $x-3$이 되도록 a, b의 값을 정하시오.

다항식 x^3+ax^2+bx-1 를 x^2+2x-1 로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 다항식 나눗셈의 성질을 이용하면 다음의 등식을 얻을 수 있다.

$$x^3+ax^2+bx-1=(x^2+2x-1)(x+c)+(x-3)$$

위 등식은 x에 어떤 값을 대입해도 성립하는 항등식이다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $-1=-c-3$ $\quad\therefore c=-2$

따라서 $x^3+ax^2+bx-1=x^3-4x-1$이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=0$, $b=-4$

02 나머지정리와 인수정리

2 항등식과 나머지 정리

나머지정리

(1) 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 나머지를 R_1이라 하면 $R_1=f(a)$이다.

(2) 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눈 나머지를 R_2라 하면 $R_2=f\left(\frac{b}{a}\right)$이다.

▷ 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라고 하면 다항식의 나눗셈의 성질에 의해

$$f(x)=(x-a)Q_1(x)+R_1$$

가 성립하고, 이 등식은 x에 대한 항등식이 된다. 따라서 $x=a$를 대입해도 등식은 성립해야 하므로, $f(a)=(a-a)Q_1(a)+R_1=R_1$ 즉,

$$R_1=f(a)$$

가 성립한다.

마찬가지 방법으로 $R_2=f\left(\frac{b}{a}\right)$ 가 됨을 알 수 있다.

▷ 나머지 정리를 이용하면 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{b}{a}$로 나눈 나머지도 $f\left(\frac{b}{a}\right)$가 됨을 알 수 있다.

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 나머지는 -3이고, $x+2$로 나누었을 때 나머지는 3이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때 나머지를 구하시오.

나머지정리로부터 $f(1)=-3$, $f(-2)=3$임을 알 수 있다.
다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$$f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

이 항등식의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$$f(1)=a+b=-3,\ f(-2)=-2a+b=3$$

이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$
따라서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $-2x-1$이다.

인수정리

(1) 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어 떨어지면 $f(a)=0$이다.

(2) 다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$ 이면 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어 떨어진다.

▷ 나머지정리에서 나머지가 0이 되는 경우라고 생각하면 쉽다.

▷ 인수 : 주어진 정수나 다항식을 몇 개의 정수와 다항식의 곱으로 나타낼 때, 그 정수와 다항식을 본래의 것의 인수라고 한다. 따라서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 에서 1, $a+b$, $a-b$, $(a+b)(a-b)$는 a^2-b^2의 인수이다.

▷ 다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어 떨어진다는 것은 다항식 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다는 것을 의미한다.

다항식 $f(x)=x^2-ax-3$이 $x+3$으로 나누어 떨어질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

인수정리에 의하여 $f(-3)=(-3)^2-a\cdot(-3)-3=0$ $\quad\therefore a=-2$

다항식 $2x^3+ax^2+bx+2$가 $(x+1)(2x-1)$로 나누어 떨어지도록 상수 a, b의 값을 구하시오.

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+2$라고 하고 $f(x)$를 $(x+1)(2x-1)$로 나눈 나머지를 $Q(x)$라고 하면

$$f(x)=(x+1)(2x-1)Q(x)$$

가 성립한다. 이것은 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누어도 떨어지고, $2x-1$로 나누어도 떨어짐을 의미하므로 인수정리에 의해 $f(-1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$가 성립한다.

$$\begin{cases} -2+a-b+2=0 \\ \frac{1}{4}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+2=0 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

01 인수분해

인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라 한다.

$$(x+1)(x+2) \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{전개}}{\rightleftarrows}} x^2+3x+2$$

인수분해 공식

(1) $ma+mb=m(a+b)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(8) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(9) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(10) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

▷ 인수분해의 기본은 공통인수로 묶어내는 것이다.

다음 식을 인수분해 하시오.

(1) $3x^3+18x^2y+36xy^2+24y^3$

(2) $64x^3-27y^3$

(3) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

(1) $3x^3+18x^2y+36xy^2+24y^3=3(x^3+3\cdot 2x^2y+3\cdot 4xy^2+8y^3)$
$=3(x+2y)^3$

(2) $64x^3-27y^3=(4x)^3-(3y)^3$
$=(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

(3) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx=(x-y+z)^2$

여러 가지 인수분해

(1) 똑같은 형태가 반복되는 식을 포함한 다항식은 그 식을 다른 문자로 치환하여 인수분해 한다.

(2) 두 개 이상의 문자를 포함하는 식을 인수분해하는 경우에는 최고차의 차수가 낮은 한 문자에 대해서 내림차순으로 정리하여 인수분해 한다.

다음 식을 인수분해 하시오.

(1) x^4-25x^2+144 (2) $(x^2-x)(x^2-x-8)+12$

(1) $x^2=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} x^4-25x^2+144 &= X^2-25X+144=(X-9)(X-16) \\ &=(x^2-9)(x^2-16) \\ &=(x-3)(x+3)(x-4)(x+4) \end{aligned}$$

(2) $x^2-x=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} (x^2-x)(x^2-x-8)+12 &= X^2-8X+12=(X-6)(X-2) \\ &=(x^2-x-6)(x^2-x-2) \\ &=(x-3)(x+2)(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

다음 식을 인수분해 하시오.

(1) $xy+y^2+2x-4$ (2) $2x^2-xy-y^2-7x+y+6$

(1)
$$\begin{aligned} xy+y^2+2x-4 &= (y+2)x+y^2-4 \\ &=(y+2)x+(y-2)(y+2) \\ &=(y+2)(x+y-2) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2x^2-xy-y^2-7x+y+6 &= 2x^2-(y+7)x-y^2+y+6 \\ &=2x^2-(y+7)x-(y-3)(y+2) \\ &=(2x+y-3)(x-y-2) \end{aligned}$$

02 고차식의 인수분해

고차식의 인수분해

삼차식 이상의 고차식을 인수분해 할 때는 인수정리와 조립제법을 이용하여 다음과 같은 순서로 인수분해 한다.

(1) $f(a)=0$이 되는 a를 구한다.

(2) $f(a)=0$이면 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 몫 $Q(x)$를 조립제법을 이용하여 구하고 $f(x)=(x-a)Q(x)$ 로 표현한다.

(3) 몫 $Q(x)$가 여전히 삼차 이상의 식이라면 고차식의 인수분해 방법을 이용하여 인수분해 하고, 이차 이하의 식이라면 인수분해 공식을 이용하여 인수분해 한다.

$x^4-3x^3+3x^2-3x+2$를 인수분해하시오.

사차식의 경우 오른쪽과 같이 두 번의 조립제법을 통하여 인수분해 할 수 있다.

$$x^4-3x^3+3x^2-3x+2$$
$$=(x-1)(x^3-2x^2+x-2)$$

여기서 x^3-2x^2+x-2를 조립제법을 이용하여 또 다시 인수분해 하면

$$x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore\ x^4-3x^3+3x^2-3x+2=(x-1)(x-2)(x^2+1)$$

$x^3+5x^2-2x-24$ 를 인수분해하시오.

$f(x)=x^3+5x^2-2x-24$ 라고 하면
$f(2)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 통하여

$$\begin{aligned} & x^3+5x^2-2x-24 \\ &\quad =(x-2)(x^2+7x+12) \\ &\quad =(x-2)(x+3)(x+4) \end{aligned}$$

과 같이 인수분해 할 수 있다.

2	1	5	-2	-24
		2	14	24
	1	7	12	0

방정식과 부등식

2

1. 복소수와 이차방정식
2. 이차방정식과 이차함수
3. 여러 가지 방정식
4. 여러 가지 부등식

수악중독

Where Impossible Becomes I'm possible

01 허수단위

허수단위

제곱하여 -1이 되는 수를 '허수단위'라고 하고 기호 i 로 나타낸다.

$$i^2=-1,\quad \sqrt{-1}=i$$

다음을 허수단위 i를 사용하여 나타내시오.

(1) $\sqrt{-4}$ (2) $\sqrt{-12}$

(1) $\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$

(2) $\sqrt{-12}=\sqrt{12\times(-1)}=\sqrt{12}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{3}i$

i의 거듭제곱

$i^2=-1$ 임을 이용하여 i의 거듭제곱을 구해보면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i \quad (\text{단, } n\text{은 자연수})$$

▷ i^n에서 n이 4로 나누어 떨어지면 $i^n=1$, n을 4로 나눈 나머지가 r (단, $r=1,\ 2,\ 3$) 이면 $i^n=i^r$이다.

▷ 이렇게 i의 거듭제곱의 값들이 i, -1, $-i$, 1의 순서로 반복되어 나타나는 성질을 i의 주기성 혹은 i의 순환성이라 부른다.

허수단위 i의 주기성을 이용하여 다음을 간단히 하시오.

(1) $(-i)^{15}$ (2) $i^{60}+i^{100}+i^{180}$

(1) $(-i)^{15}=(-1)^{15}\times i^{15}=-i^3=i$

(2) $i^{40}+i^{100}+i^{200}=1+1+1=3$

음수의 제곱근

$a>0$일 때

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

(2) $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다.

▷ $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt{a}\,i$

▷ $a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 방정식 $x^2=-a$의 근이다.
즉, 제곱해서 $-a$가 되는 수는

$(\sqrt{a}\,i)^2=ai^2=-a$, $(-\sqrt{a}\,i)^2=ai^2=-a$

가 있으므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다.

음수의 제곱근의 성질

(1) $a<0$, $b<0$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이다.

(2) $a>0$, $b<0$ 이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이다.

(3) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$ 이다.

(4) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$ 이다.

▷ $a<0$, $b<0$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}\,i\sqrt{-b}\,i=\sqrt{(-a)\times(-b)}\,i^2=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$

▷ $a<0$, $b<0$ 인 경우를 제외하면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이다.

▷ $a>0$, $b<0$ 이면

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}\,i}=\frac{\sqrt{a}\,i}{\sqrt{-b}\,i^2}=\sqrt{\frac{a}{-b}}\times\frac{i}{-1}=-\sqrt{-\frac{a}{b}}\times i=-\sqrt{-\frac{a}{b}\times(-1)}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

▷ $a>0$, $b<0$인 경우를 제외하면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$) 이다.

$(x^2-1)(y^2-1)\neq 0$인 실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{x-1}\,\sqrt{y-1}=-\sqrt{(x-1)(y-1)},\ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+1}}=-\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}$$

이 성립할 때, $|x+3|+|y-1|+\sqrt{y^2}$을 간단히 하시오.

$(x^2-1)(y^2-1)\neq 0$ 은 $x\neq\pm 1$, $y\neq\pm 1$ 임을 의미한다.

$\sqrt{x-1}\,\sqrt{y-1}=-\sqrt{(x-1)(y-1)}$ 은 $x<1$, $y<1$ 임을 의미한다.

$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+1}}=-\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}$ 은 $x>-1$, $y<-1$ 임을 의미한다.

따라서 $-1<x<1$, $y<-1$ 가 된다.

$|x+3|+|y-1|+\sqrt{y^2}=x+3-y+1-y=x-2y+4$

02 복소수

복소수

두 실수 a, b 와 허수 단위 i 에 대하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타내어지는 수를 **복소수**라 하고, a 를 **실수부분**, b 를 **허수부분**이라고 한다. 특히 $a=0$, $b\neq 0$ 일 때 bi 를 순허수라고 한다.

$$\underset{\text{실수부분}}{a} + \underset{\text{허수부분}}{b}\,i$$

복소수 $a+bi$
- 실수 a $(b=0)$
- 허수
  - 순허수 bi $(a=0, b\neq 0)$
  - 기타허수 $a+bi$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

▷ $-\sqrt{3}$의 실수부분은 $-\sqrt{3}$, 허수부분은 0이다. 즉, $-\sqrt{3}$는 실수다.
▷ $2+3i$의 실수부분은 2, 허수부분은 3이다.
▷ $\sqrt{5}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{5}$이다. 즉, $\sqrt{5}i$는 순허수다.

켤레복소수

복소수 $a+bi$ 에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 $a-bi$ 를 복소수 $a+bi$ 의 **켤레복소수**라 하고 $\overline{a+bi}$ 로 나타낸다.

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

복소수의 덧셈에 대한 성질

임의의 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

(1) 교환법칙 $z_1+z_2=z_2+z_1$

(2) 결합법칙 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

▷ a, b, c, d, e, f가 실수일 때, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$에 대하여

(1) $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i=(c+a)+(d+b)i=z_2+z_1$

(2) $(z_1+z_2)+z_3=\{(a+c)+(b+d)i\}+(e+fi)=(a+c+e)+(b+d+f)i$

$z_1+(z_2+z_3)=(a+bi)+\{(c+e)+(d+fi)\}=(a+c+e)+(b+d+f)i$

복소수의 곱셈

a, b, c, d가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

▷ 허수단위 i를 문자로 생각하고 $i^2=-1$을 이용하여 계산한다.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

$(-3-i)(2-4i)$를 간단히 하시오.

$$\begin{aligned}(-3-i)(2-4i)&=\{(-3)\times2-(-1)\times(-4)\}+\{(-3)\times(-4)-2\}i\\&=-10+10i\end{aligned}$$

복소수의 곱셈에 대한 성질

임의의 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

(1) 교환법칙 $z_1z_2 = z_2z_1$

(2) 결합법칙 $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

(3) 분배법칙 $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$, $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

▷ a, b, c, d, e, f가 실수일 때, $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $z_3 = e+fi$에 대하여

(1) $z_1z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$z_2z_1 = (c+di)(a+bi) = (ac-bd)+(bc+ad)i$

(2) $(z_1z_2)z_3 = \{(ac-bd)+(ad+bc)i\}\times(e+fi)$
$= (ace-bde-adf-bcf)+acf-dbf+ade+bce)i$

$z_1(z_2z_3) = (a+bi)\times\{(ce-df)+(cf+de)i\}$
$= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)i$

(3) $z_1(z_2+z_3) = (a+bi)\{(c+e)+(d+f)i\} = (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i$

$z_1z_2+z_1z_3 = (a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi)$
$= (ac-bd)+(bc+ad)i+(ae-df)+(af+be)i$
$= (ac-bd+ae-df)+(bc+ad+af+be)i$

복소수의 나눗셈

a, b, c, d가 실수이고 $c+di \neq 0$ 일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

▷ $\dfrac{a+bi}{c+di} == \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$\dfrac{2-i}{1+i} = a+bi$에서 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수)

$\dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$\therefore\ a+b = \dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -1$

켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2에 대하여

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

▷ a, b, c, d가 실수일 때, $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$에 대하여

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=\overline{(\overline{a+bi})}=\overline{a-bi}=a+bi=z_1$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{a+bi+c+di}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i$
$=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1-z_2}=\overline{a+bi-c-di}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$
$=(a-bi)-(c-di)=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-db)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\dfrac{a+bi}{c+di}\times\dfrac{c-di}{c-di}}=\overline{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)-\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{a-bi}{c-di}\times\dfrac{c+di}{c+di}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)-\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

▷ $z_1+\overline{z_1}$ 과 $z_1\overline{z_1}$은 모두 실수가 된다.

복소수가 서로 같을 조건

$a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수 일 때

(1) $a+bi=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0,\ b=0$

(2) $a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \quad a=c,\ b=d$

등식 $3+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-y)i=(x+y)+(3-x)i$을 만족하는 실수 $x,\ y$를 구하시오.

연립방정식 $\begin{cases} x+y=3+\sqrt{3} \\ x-y=3-\sqrt{3} \end{cases}$ 를 풀면 $x=3,\ y=\sqrt{3}$이다.

01 이차방정식

이차방정식

$ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ 의 꼴로 주어지거나 혹은 이와 같은 꼴로 변형할 수 있는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라고 한다.

이차방정식의 해법

(1) 인수분해에 의한 해법

x 에 관한 이차방정식 $(ax-b)(cx-d)=0$ 의 형태로 인수분해 될 때, 해는

$$x=\frac{b}{a} \text{ 또는 } x=\frac{d}{c}$$

(2) 완전제곱식에 의한 해법

x 에 관한 이차방정식을 $(x-A)^2=B$ 의 꼴로 변형하면,

$$(x-A)^2=B \quad \Leftrightarrow \quad x=A\pm\sqrt{B}$$

(3) 근의 공식에 의한 해법

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ 의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

② 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ $(a \neq 0)$ 의 해는

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

▷ 근의 공식 유도

일반적으로 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ 의 양변을 a 로 나누면

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \therefore x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

▷ b가 짝수일 때, 즉 $b=2b'$인 경우의 근의 공식 (일명 짝수 공식)

$b^2-4ac=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$이므로

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

▷ $b^2-4ac\geq0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 실수, $b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 허수가 된다.
따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수 범위에서 반드시 근을 갖는다.

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+5x+2=0$ (2) $2x^2-4x+7=0$

(1) 근의 공식에서 $a=1,\ b=5,\ c=2$이므로

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

(2) 근의 공식에서 $a=2,\ b=-4,\ c=7$이므로

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-2\cdot7}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-10}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{10}i}{2}$$

02 판별식

이차방정식의 판별식

실수 $a,\ b,\ c$를 계수로 하는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $D=b^2-4ac$를 판별식이라 하고 다음과 같이 근을 분류할 수 있다.

(1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $D=0 \Leftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
(3) $D<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

▷ 계수가 실수인 이차방정식에 대해서만 판별식을 사용할 수 있다.

▷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근은 근의 공식에 의해 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 임을 알고 있다. 이 때, a, b, c가 모두 실수라면 x가 실수가 될지, 허수가 될지 결정하는 것은 $\sqrt{b^2-4ac}$ 부분이다. 즉, b^2-4ac가 양수인지, 0인지, 음수인지에 따라 x가 실수인지 허수인지가 결정되게 된다.

▷ $b^2-4ac=0$이면 방정식은 $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=0$이 된다. 따라서 똑같은 실근 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 두 개 갖는다. 즉, 근의 개수는 두 개이고, 근의 종류가 하나라고 보는 것이 맞다. 결국 두 실근을 가질 조건은 $D\geq 0$이 된다.

▷ b가 짝수일 때, 즉 $b=2b'$인 경우는 $\dfrac{D}{4}=(b')^2-ac$를 사용한다.

다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+3x+1=0$ (2) $x^2-4x+4=0$
(3) $3x^2+5x+4=0$

(1) $D=3^2-4\times1\times1=5>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$이므로 중근을 갖는다.
(3) $D=5^2-4\times3\times4=-23<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-kx+3k=0$ 이 중근을 갖게 되는 실수 k의 값을 구하시오.

$D=k^2-12k=0$ 이므로 $k=0$ 또는 $k=12$이다.

이차식 $kx^2-8x+k-6$이 x에 대한 완전제곱식이 되는 실수 k의 값을 구하시오.

이차식 $kx^2-8x+k-6$이 x에 대한 완전제곱식이 되면 이차방정식

$kx^2-8x+k-6=0$은 $k(x-\alpha)^2=0$ 꼴이 되어 중근을 갖게 된다.

즉, $kx^2-8x+k-6$이 x에 대한 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$kx^2-8x+k-6=0$의 판별식이 0이면 된다.

$\frac{D}{4}=(-4)^2-k(k-6)=0$

$k^2-6k-16=0$, $\quad (k-8)(k+2)=0$

$\therefore\ k=8$ 또는 $k=-2$

03 근과 계수와의 관계

이차방정식의 근과 계수와의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

▷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 $D=b^2-4ac$로 놓으면

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

이다. 이때 두 근 α, β의 합과 곱은 각각 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

▷ 계수가 실수인 이차방정식이 허근을 갖게 되면 반드시 두 근의 관계는 켤레복소수가 되므로 두 근의 합과 곱이 모두 실수가 된다.

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (2) $\alpha^3+\beta^3$

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$이므로

(1) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4^2-2\cdot5}{5}=\frac{6}{5}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot5\cdot4=4$

두 수를 근으로 갖는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 갖고, x^2의 계수가 a $(a \neq 0)$인 이차방정식은

$$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$$

▷ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$을 전개하면 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$ 가 된다.

두 수 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

두 근의 합은 2, 두 근의 곱은 -1이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$

합이 4이고 곱이 6인 두 수를 구하시오.

구하는 두 수를 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=6$$

이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근이다. 이 이차방정식을 풀면

$$x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$$

따라서 구하는 두 수는 $2+\sqrt{2}i$, $2-\sqrt{2}i$이다.

이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

다음 이차식을 복소수 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-6x+7 (2) $7x^2+5x+1$

(1) 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-7}}{1}=3\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore\ x^2-6x+7=\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}$$
$$=(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$$

(2) 이차방정식 $7x^2+5x+1=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-28}}{14}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{14}$$

$$\therefore\ 7x^2+5x+1=7\left(x-\frac{-5+\sqrt{3}i}{14}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{3}i}{14}\right)$$
$$=7\left(x+\frac{5}{14}-\frac{\sqrt{3}}{14}i\right)\left(x+\frac{5}{14}+\frac{\sqrt{3}}{14}i\right)$$

이차방정식의 켤레근

(1) 모든 계수가 유리수인 이차방정식에서
한 근이 $a+b\sqrt{m}$ (a, b는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $a-b\sqrt{m}$도 근이다.

(2) 모든 계수가 실수인 이차방정식에서
한 근이 $a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)이면 $a-bi$도 근이다.

▷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 인 것을 생각하면 켤레근을 갖는 이유를 알 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $4+\sqrt{3}$ 일 때, 두 근의 곱을 구하시오.
(단, a, b, c는 유리수)

a, b, c가 유리수 이므로 나머지 한 근은 $4-\sqrt{3}$이 된다.
따라서 두 근의 곱은 $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=16-3=13$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

한 근이 $1+i$이면 나머지 한 근은 $1-i$이므로 근과 계수와의 관계에서
$-a=(i+1)+(1-i)=2 \quad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2$

04 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식의 실근의 부호

모든 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라고 할 때

(1) 두 근이 모두 양수일 조건

$D \geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수일 조건

$D \geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 조건

$\alpha\beta<0$ (이 경우 무조건 $D>0$이 된다.)

❶ 두 근의 절댓값이 같을 조건 : $\alpha\beta<0$, $\alpha+\beta=0$

❷ 양근의 절댓값이 더 클 조건 : $\alpha\beta<0$, $\alpha+\beta>0$

❸ 음근의 절댓값이 더 클 조건 : $\alpha\beta<0$, $\alpha+\beta<0$

▷ 두 근이 서로 다른 부호일 조건은 $\alpha\beta<0$이다. 이 경우 판별식은 무조건 0보다 크기 때문에 따로 고려할 필요가 없다. $D=b^2-4ac$에서 $b^2 \geq 0$이고, $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$에서 $ac<0$이므로 $b^2-4ac>0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2-2x+k+7=0$의 두 근이 모두 양수이기 위한 실수 k 값의 범위를 구하시오.

(1) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+7) \geq 0$ 에서 $k \leq -6$

(2) $\alpha+\beta=2>0$

(3) $\alpha\beta=k+7>0$ 에서 $k>-7$

(1), (3)에서 $-7<k \leq -6$

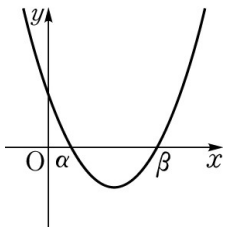
이차방정식 $x^2+2x-k+5=0$의 두 근의 부호가 서로 다르기 위한 실수 k 값의 범위를 구하시오.

$\alpha\beta=-k+5<0$ 에서 $k>5$

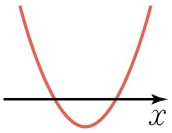
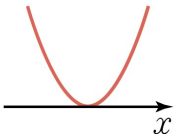
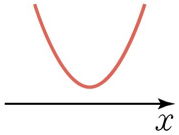
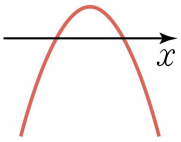
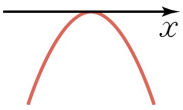
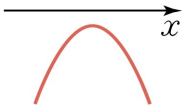
이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축이 만나는 교점의 x좌표와 같다. 그러므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

▷ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 된다.



▷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축 사이에 다음의 관계가 성립한다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			
x축과의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다)	만나지 않는다.

이차함수 $y=x^2-4x+3k+10$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같이 되도록 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

이차방정식 $x^2-4x+3k+10=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3k+10)=-3k-6$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$ 이어야 하므로 $k<-2$

(2) 한 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}=0$ 이어야 하므로 $k=-2$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$ 이어야 하므로 $k>-2$

이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

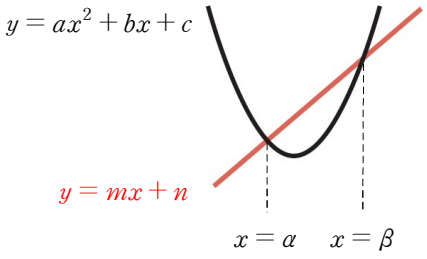
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식

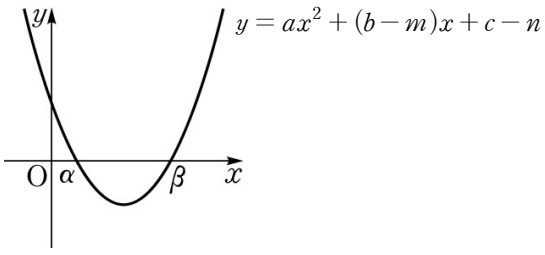
$$ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

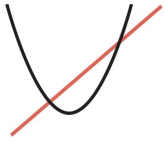
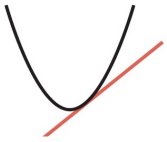
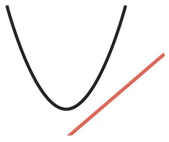
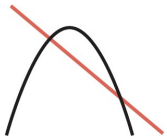
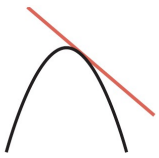
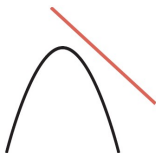
(1) $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D=0$ ⇔ 한 점에서 만난다. (접한다)
(3) $D<0$ ⇔ 만나지 않는다.

▷ 아래 왼쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 그래프의 교점의 x좌표가 각각 α, β 일 때, 이차함수 $y=ax^2+(b-m)x+c-n$의 그래프와 x축은 아래 오른쪽 그림과 같이 x좌표가 각각 α, β인 점에서 만난다.





▷ 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$ 사이에는 다음과 같은 위치 관계가 성립한다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			
직선과의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다)	만나지 않는다.

직선 $y=-2x+k$와 이차함수 $y=2x^2+3x$의 그래프의 위치 관계가 다음과 같도록 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

이차방정식 $2x^2+5x-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$$D=5^2-4\times2\times(-k)=25+8k$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$ 이어야 하므로 $k>-\frac{25}{8}$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$ 이어야 하므로 $k=-\frac{8}{25}$

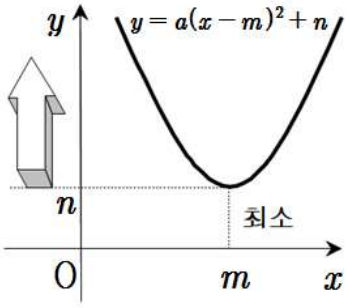
(3) 만나지 않으려면 $D<0$ 이어야 하므로 $k<-\frac{25}{8}$

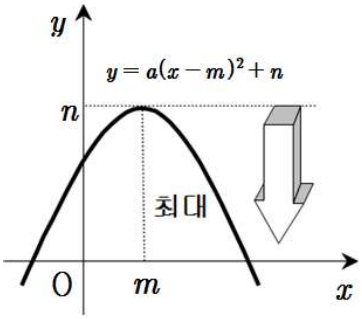
02 이차함수의 최대와 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최대 · 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 때는 $y=a(x-m)^2+n$ 의 꼴로 변형하여 다음과 같이 구한다.

(1) $a>0$ 이면 y는 $x=m$일 때, 최솟값 n을 갖는다. (최댓값 없음)
(2) $a<0$ 이면 y는 $x=m$일 때, 최댓값 n을 갖는다. (최솟값 없음)





이차함수 $y=x^2+6x+3$의 최댓값 혹은 최솟값을 구하시오.

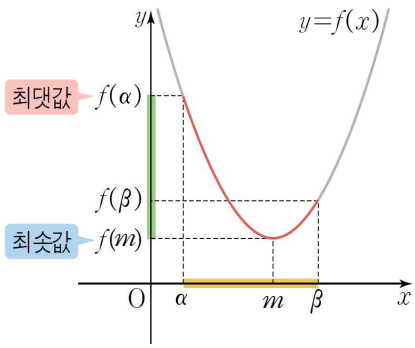
이차함수 $y=x^2+6x+3$는 $y=(x+3)^2-6$이므로 그 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -6)$이고 아래로 볼록한 이차곡선이다. 따라서 $x=-3$에서 최솟값 -6을 갖는다.

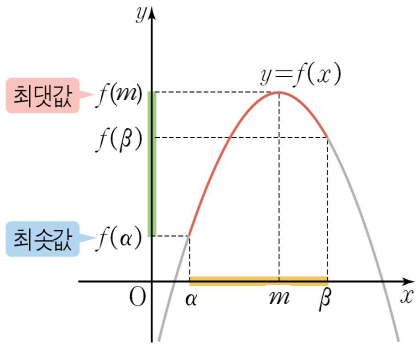
제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

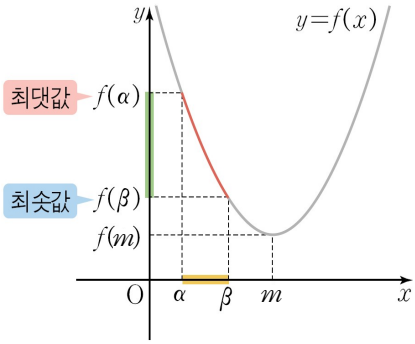
$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n\ (a \ne 0)$ 의 최대 · 최소는 다음과 같이 구할 수 있다.

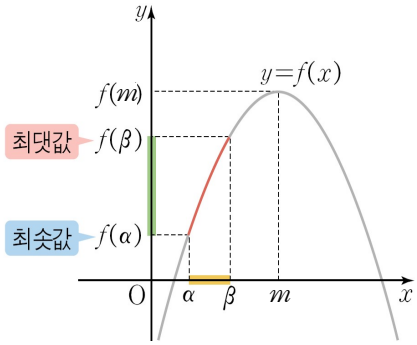
(1) $x=m$ (대칭축)이 범위에 포함되는 경우 $(\alpha \le m \le \beta)$
$f(m),\ f(\alpha),\ f(\beta)$ 중 가장 큰 것이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이 된다.

(2) $x=m$(대칭축)이 범위에 포함되지 않는 경우 $(m<\alpha,\ m>\beta)$
$f(\alpha),\ f(\beta)$중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값



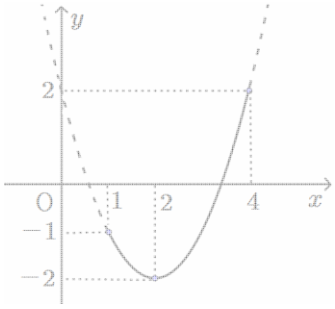






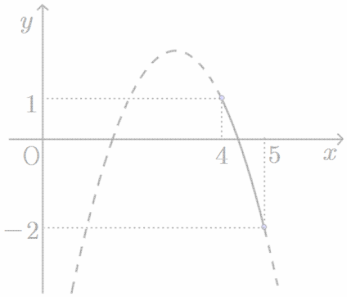
구간 $1 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

$y = (x-2)^2 - 2$와 같으므로 대칭축 $x = 2$가 정의역 범위 안에 포함된다. 따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$를 비교하여 최대, 최소를 결정한다.
$f(1) = -1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 2$이므로 최댓값은 2, 최솟값은 -2가 된다.



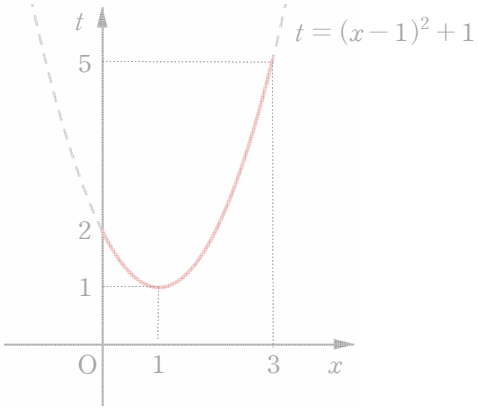
구간 $4 \le x \le 5$ 에서 이차함수 $y = -x^2 + 6x - 7$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

$y = -(x-3)^2 + 2$와 같으므로 대칭축은 $x = 3$ 이 정의역 범위 안에 포함되지 않는다. 따라서 $f(4)$, $f(5)$를 비교하여 최대, 최소를 결정한다.
$f(4) = 1$, $f(5) = -2$이므로 최댓값은 1, 최솟값은 -2가 된다.



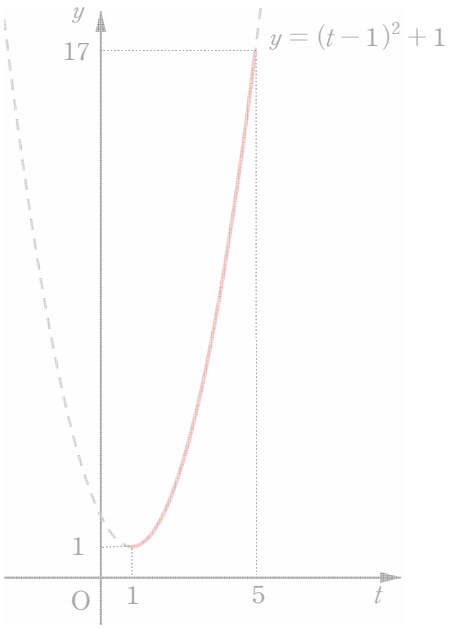
구간 $0 \le x \le 3$에서 함수 $y=(x^2-2x+2)^2-2(x^2-2x+2)+2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

$x^2-2x+2=t$로 치환하면 구간 $0 \le x \le 3$에서 $t=(x-1)^2+1$의 최댓값과 최솟값은 각각 1, 5가 된다. 결국 t의 범위는 $1 \le t \le 5$ 가 된다.



결국 주어진 문제는 구간 $1 \le t \le 5$ 에서 $y=t^2-2t+2$의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 된다. $y=(t-1)^2+1$의 그래프에서부터 $M=17$, $m=1$임을 알 수 있다.

$\therefore\ M+m=18$



01 고차방정식

삼차방정식과 사차방정식

다항식 $f(x)$가 x에 관한 n차식일 때, $f(x)=0$의 꼴로 나타내어지는 방정식을 'x에 관한 n차방정식'이라고 한다. 특히, $n=3,\ 4$ 일 때, 이 방정식을 각각 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

삼차방정식과 사차방정식의 풀이법

(1) 인수분해 공식의 이용

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) 인수정리의 이용 (조립제법의 이용)

$f(\alpha)=0$ 이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 임을 이용한다.

(3) 복이차식 (x 와 x^3의 항이 없는 사차방정식)의 이용

$x^2=t$ 로 치환하여 인수분해 공식을 이용한다.

(4) 치환에 의한 방법

식 중 같은 부분이 있으면 치환하여 식을 간단히 한다. 같은 부분이 없을 때도, 같은 부분이 나올 수 있게 변형해 본다.

삼차방정식 $x^3-1=0$을 푸시오.

방정식의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근은 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

삼차방정식의 $x^3-1=0$ 근은 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

삼차방정식 $x^3-4x+3=0$을 푸시오.

$f(x)=x^3-4x+3$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다. 따라서 조립제법을 통해 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x-3)=0$이 되고 이차방정식 $x^2+x-3=0$의 근은 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 이 된다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 삼차방정식 $x^3-4x+3=0$의 근은 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 이다.

사차방정식 $x^4+x^2-6=0$을 푸시오.

$x^2=X$로 치환하면 주어진 방정식은 $X^2+X-6=0$

$(X-2)(X+3)=0 \qquad \therefore X=2$ 또는 $X=-3$

결국 $x^2=2$ 또는 $x^2=-3$ 을 만족하는 x를 구하면 된다.

따라서 사차방정식 $x^4+x^2-6=0$ 의 근은 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$ 이다.

사차방정식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$을 푸시오.

$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4, \quad (x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ 이므로 주어진 방정식은

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3=0$

$x^2+5x=X$로 치환하면 주어진 방정식은 $(X+4)(X+6)-3=0$

$\therefore X^2+10X+21=0 \qquad (X+3)(X+7)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=-7$

결국 $x^2+5x+3=0$ 또는 $x^2+5x+7=0$ 을 만족하는 x를 구하면 된다.

따라서 사차방정식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$의 근은

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

사차방정식 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$을 푸시오.

방정식에 $x=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않는다. 따라서 $x=0$은 방정식의 근이 아니므로 양변을 x^2으로 나눈다.

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \qquad \therefore \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$이므로

$$t^2-2+7t+14=0 \qquad \therefore\ t^2+7t+12=0$$

$$(t+3)(t+4)=0 \qquad \therefore\ t=-3 \text{ 또는 } t=-4$$

즉, $x+\frac{1}{x}=-3$ 또는 $x+\frac{1}{x}=-4$가 되고 각 식의 양변에 x를 곱해주면

$$x^2+3x+1=0 \text{ 또는 } x^2+4x+1=0$$

따라서 사차방정식 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x=-2\pm\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

삼차방정식 $2x^3-3x^2+x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오.

(2) $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하시오.

(1) 삼차방정식 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{-5}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=4$이다.

(2) α, β, γ를 세 근을 하고 최고차항의 계수가 2인 삼차방정식은

$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이다.

$$\therefore\ 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=2x^3-3x^2+x-5$$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2-3+1-5$$

$$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-\frac{5}{2}$$

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\omega^2+\omega+1$ (2) $\omega+\overline{\omega}$

(3) $\omega\overline{\omega}$ (4) $\omega^2-\overline{\omega}$

(5) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$ (6) $\omega^{100}+\omega^{101}$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 $x^3-1=0$의 허근은 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근과 같다. 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 계수들이 모두 실수이므로 ω가 한 근이면 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$ 가 된다.

(1) $\omega^2+\omega+1=0$

(2) 근과 계수와의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$

(3) 근과 계수와의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^3=1$에서 $\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$, $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$이므로 $\omega^2-\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{1}{\omega}=0$

(5) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\overline{\omega}=-1$

(6) $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\times\omega=\omega$, $\omega^{101}=(\omega^3)^{33}\times\omega^2=\omega^2$이므로

$\omega^{100}+\omega^{101}=\omega+\omega^2=-1$

02 연립이차방정식

연립이차방정식

하나가 이차방정식이고 다른 하나가 일차방정식 또는 이차방정식인 연립방정식을 연립이차방정식이라고 한다.

연립이차방정식의 풀이법

(1) 일차식과 이차식의 연립방정식은 일차식을 이차식에 대입하여 푼다.
(2) 이차식과 이차식의 연립방정식은 한 쪽을 인수분해하여 일차방정식을 얻은 후, 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

연립방정식 $\begin{cases} x-3y=1 & \cdots ① \\ x^2-y^2=3 & \cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

①에서 $x=3y+1$ …… ③ ③을 ②에 대입하면

$(3y+1)^2-y^2=3$ $8y^2+6y-2=0$

$2(4y-1)(y+1)=0$ $\therefore\ y=\frac{1}{4}$ 또는 $y=-1$

이것을 ③에 대입하면 $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2=20 & \cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

①의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=0$

$x-y=0$ 또는 $x-2y=0$

$\therefore\ x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$를 ②에 대입하면 $x^2+x^2=20$

$\therefore\ 2x^2=20$ $x^2=10$ $x=\pm\sqrt{10}$

$\therefore\ x=\sqrt{10}$일 때 $y=\sqrt{10}$,

$x=-\sqrt{10}$일 때 $y=-\sqrt{10}$

ii) $x=2y$를 ②에 대입하면 $4y^2+y^2=20$

$\therefore\ 5y^2=20$ $y^2=4$ $y=\pm 2$

$\therefore\ y=2$일 때 $x=4$,

$y=-2$일 때 $x=-4$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 를 푸시오.

$x+y=a,\ xy=b$라고 하면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} a^2-2b+a=2 & \cdots ① \\ a^2-b=1 & \cdots ② \end{cases}$ 이 된다. ②에서 $b=a^2-1$을 ①에 대입하면 $a^2-a=0$ 이다.

$\therefore \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

$x,\ y$를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-at+b=0$이다.

i) $t^2-1=0$에서 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

ii) $t^2-t=0$에서 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 공통근이 아닌 두 근의 합을 구하시오. (단, $a \neq b$)

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots$ ㉠

$\alpha^2+b\alpha+a=0 \quad \cdots$ ㉡

㉠ - ㉡에서 $(a-b)\alpha+b-a=0$

$(a-b)\alpha=a-b$

$\therefore \alpha=1 \quad (\because a \neq b)$

㉠에 대입하면 $1+a+b=0$에서 $b=-a-1$이므로 두 이차방정식은

$x^2+ax-a-1=0,\ x^2-(a+1)x+a=0$

각각의 좌변을 인수분해하면

$(x+a+1)(x-1)=0,\ (x-a)(x-1)=0$

이고, 공통근이 아닌 두 근은 각각 $-a-1,\ a$이므로 공통근이 아닌 두 근의 합은

$-a-1+a=-1$

두 이차방정식 $x^2+(k-1)x-3k=0$, $x^2-(k+3)x+3k=0$이 공통근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k \neq 0$)

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+(k-1)\alpha-3k=0 \quad \cdots$ ㉠

$\alpha^2-(k+3)\alpha+3k=0 \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡에서 $2\alpha^2-4\alpha=0$

$2\alpha(\alpha-2)=0$

$\alpha=0$이면 $k=0$이 되어 모순이다.

$\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$2^2+2k-2-6=0$

$\therefore k=2$

방정식 $xy+2x-y=6$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

$xy+2x-y-6=0$에서

$(x-1)(y+2)=4$이고, x, y는 정수이므로

$x-1=\pm 1,\ y+2=\pm 4$(복부호동순)

$x-1=\pm 2,\ y+2=\pm 2$(복부호동순)

$x-1=\pm 4,\ y+2=\pm 1$(복부호동순)

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

따라서 xy의 최댓값은 $x=-3,\ y=-3$일 때 9이다.

방정식 $x^2+y^2-2x-4y+5=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 곱 xy의 값을 구하시오.

$x^2+y^2-2x-4y+5=0$에서

$x^2-2x+(y^2-4y+5)=0 \qquad \cdots$ ㉠

x는 실수이므로

$D/4=(-1)^2-(y^2-4y+5)=-y^2+4y-4=-(y-2)^2 \geq 0$

따라서 $(y-2)^2 \leq 0$이고 $y-2$는 실수이므로 $y-2=0$에서 $y=2$

㉠에 대입하면

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

$\therefore\ xy=2$

01 연립일차부등식

연립일차부등식

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 연립부등식이라고 한다.
연립부등식에서 부등식이 모두 일차부등식 일 때, 이 연립부등식을
연립일차부등식이라고 한다.

연립일차부등식의 풀이

(1) 연립부등식으로 주어진 각각의 일차부등식을 푼다.
(2) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다. (선택사항)
(3) 두 부등식을 동시에 만족하는 범위를 구하여 부등식의 해로 결정한다.

연립부등식 $\begin{cases} 2x+3>x+5 & \cdots \text{㉠} \\ 5x-5 \le 3x+5 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$ 을 푸시오.

㉠을 풀면 $x>2$ 이고, ㉡을 풀면 $x \le 5$ 이다.
㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 함께 나타내면 오른쪽
그림과 같고, 수직선 위의 공통인 부분은
$2<x\le 5$가 부등식의 해가 된다.

부등식 $A < B < C$ 의 풀이

부등식 $A < B < C$ 는 부등식 $A < B$ 와 $B < C$ 를 함께 나타낸 것이다.
따라서 연립부등식 $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ 와 같다.

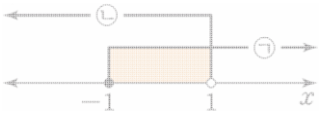
연립부등식 $2x+1 \le 4x+3 < 3x+4$를 푸시오.

주어진 연립부등식은 $\begin{cases} 2x+1 \le 4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3 < 3x+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 과 같다.

㉠을 풀면 $-2x \le 2$, $x \ge -1$

㉡을 풀면 $x < 1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 함께 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 연립부등식의 해는 $-1 \le x < 1$ 이다.

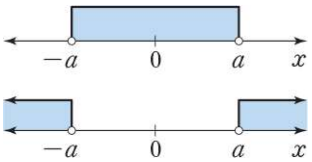
02 절댓값을 포함한 일차부등식 5 여러 가지 부등식

절댓값을 한 개 포함한 일차부등식의 풀이

상수 a, b에 대하여 $0<a<b$ 일 때, 다음을 이용하여 절댓값을 포함한 부등식을 풀 수 있다.

(1) $|x|<a$ 이면 $-a<x<a$ 이다.
(2) $|x|>a$ 이면 $x<-a$ 또는 $x>a$ 이다.
(3) $a<|x|<b$ 이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$ 이다.

▷ $|x|$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 뜻하므로 $|x|<a$는 원점으로부터 거리가 a미만인 구간이 되므로 $-a<x<a$가 되고, $|x|>a$는 원점으로부터 거리가 a초과인 구간이 되므로 $x<-a$ 또는 $x>a$ 가 된다. 이를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



▷ $a<|x|<b$ 는 부등식 $|x|>a$와 부등식 $|x|<b$의 연립부등식으로 보면 된다.

다음 부등식을 푸시오.

(1) $|3x-2|>1$ (2) $|5-2x|\le 3$ (3) $5<|2x+1|<7$

(1) $|3x-2|>1$에서 $3x-2<-1$ 또는 $3x-2>1$

$3x<1$ 또는 $3x>3$ $\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$

(2) $|5-2x|\le 3$에서 $-3\le 5-2x\le 3$

$-8\le -2x\le -2$ $\therefore 1\le x\le 4$

(3) $5<|2x+1|<7$에서 $5<2x+1<7$ 또는 $-7<2x+1<-5$

$4<2x<6$ 또는 $-8<2x<-6$

$\therefore$ $2<x<3$ 또는 $-4<x<-3$

절댓값을 두 개 포함한 일차부등식의 풀이

상수 a, b, m, n, k에 대하여 $a<b$ 일 때, 부등식 $m|x-a|+n|x-b|<k$ 은 다음과 같이 풀 수 있다.

(1) (절대값 안)$=0$ 인 x $(x=a, b)$ 의 값을 구한다.
(2) $x=a$, b 의 값을 경계로 구간을 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$ 로 나누어 생각한다.
(3) 각 구간에 대하여 절댓값을 풀어서 부등식을 정리한 후, 부등식의 해와 각 구간의 공통 범위를 구한다.
(4) (3)에서 구한 범위들을 모두 합쳐 부등식의 해를 결정한다.

부등식 $2|x-1|+3|x+1|<6$을 푸시오.

주어진 부등식의 (절대값 안)$=0$ 되는 점을 경계로 오른쪽 그림과 같이 세 구간으로 나누어 생각한다.

i) $x<-1$일 때, 주어진 부등식은 $-2x+2-3x-3<6$

$-5x-1<6$ $\quad x>-\frac{7}{5}$ $\quad \therefore -\frac{7}{5}<x<-1$

ii) $-1\le x<1$일 때, 주어진 부등식은 $-2x+2+3x+3<6$

$x+5<6$ $\quad x<1$ $\quad \therefore -1\le x<1$

iii) $x\ge 1$일 때, 주어진 부등식은 $2x-2+3x+3<6$

$5x+1<6$ $\quad x<1$ $\quad \therefore$ 공통 범위 없음

i), ii), iii)에 의하여 $-\frac{7}{5}<x<1$

03 이차부등식

이차부등식

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c<0,\quad (a\neq 0)$$
$$ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c\leq 0$$

과 같이 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x 에 관한 이차부등식이라고 한다.

이차함수의 그래프와 이차부등식

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 함숫값이 양수가 되는 x값들의 집합, 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 함숫값이 음수가 되는 x값들의 집합, 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

이차부등식의 해

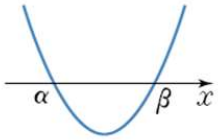
(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때 $(D>0)$

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$

③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

④ $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$



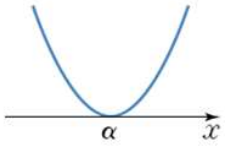
(2) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$이 중근 α를 가질 때 $(D=0)$

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수

② $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 모든 실수

③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $x=\alpha$



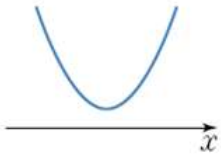
(3) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$이 허근을 가질 때 $(D<0)$

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수

② $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 모든 실수

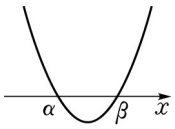
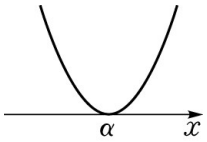
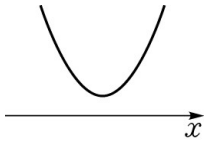
③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 없다.



▷ D는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이다.

▷ 이차항의 계수 a가 음수인 경우에는 부등식의 양변에 -1을 곱하여 이차항의 계수를 양수로 만들어 생각하면 된다.

$a>0$인 경우	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$ 의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq 0$ 의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$ 의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq 0$ 의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

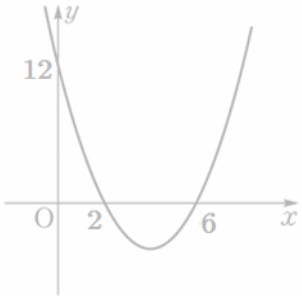
다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-8x+12>0$ (2) $x^2-8x+12\le 0$

오른쪽 $y=x^2-8x+12$의 그래프에서

(1) 함숫값이 양수가 되는 x의 범위는
$x<2$ 또는 $x>6$

(2) 함숫값이 음수 또는 0이 되는 x의 범위는
$2\le x\le 6$



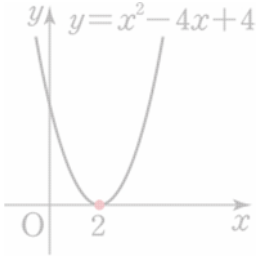
다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+4\le 0$ (2) $x^2-4x+4>0$

오른쪽 $y=x^2-4x+4$의 그래프에서

(1) 함숫값이 음수 또는 0이 되는 x의 범위는
$x=2$

(2) 함숫값이 양수가 되는 x의 범위는
$x\ne 2$인 모든 실수



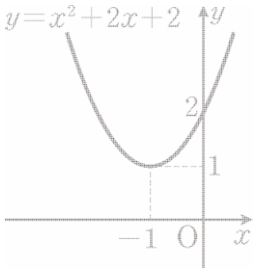
다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+2x+2>0$ (2) $x^2+2x+2\le 0$

오른쪽 $y=x^2+2x+2$의 그래프에서

(1) 함숫값이 양수가 되는 x의 범위는
모든 실수

(2) 함숫값이 음수 또는 0이 되는 x의 범위는 존재하지 않으므로 해는 없다.



모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$4x^2-4(k-2)x+6k-17>0$$

가 항상 성립하도록 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차부등식 $4x^2-4(k-2)x+6k-17>0$가 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=4x^2-4(k-2)x+6k-17$의 그래프가 오른쪽 그래프처럼 모두 x축 위에 그려져야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 그 함숫값이 항상 양수여야 한다. 결국 이차방정식 $4x^2-4(k-2)x+6k-17=0$의 판별식이 $D<0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=4(k-2)^2-4\cdot(6k+17)=4(k^2-10k+21)$$
$$=4(k-3)(k-7)<0$$

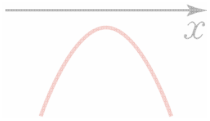
따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $3<k<7$이다.

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$kx^2-4\sqrt{3}x+k+1<0$$

이 항상 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차부등식 $kx^2-4\sqrt{3}x+k+1<0$가 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=kx^2-4\sqrt{3}x+k+1$의 그래프가 오른쪽 그래프처럼 모두 x축 아래쪽에 그려져야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 그 함숫값이 항상 음수여야 한다. 이 경우 두 가지 조건 $k<0$, 그리고 이차방정식 $kx^2-4\sqrt{3}x+k+1=0$의 판별식이 $D<0$을 모두 만족시켜야 한다.



$$\frac{D}{4}=(2\sqrt{3})^2-k^2-k<0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2+k-12>0$$

$\therefore\ k<-4$ 또는 $k>3$

따라서 $\begin{cases} k<-4,\ k>3 \\ k<0 \end{cases}$ 의 공통 범위를 구하면 된다.

$\therefore\ k<-4$

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $-2<x<4$일 때, 부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해는 $\alpha<x<\beta$ 이다. 이때, 두 실수 α,β에 대하여 $\left|\frac{1}{\alpha\beta}\right|$의 값을 구하시오. (단, a,b,c는 실수)

해가 $-2<x<4$ 이고 최고차항의 계수가 a인 이차부등식은 $a(x+2)(x-4)<0$ $(a>0)$이다. 따라서

$$ax^2+bx+c=ax^2-2ax-8a$$

가 되어야 한다.

$\therefore\ b=-2a,\ c=-8a$

결국 부등식 $cx^2+bx+a>0$은 $8x^2+2x-1<0$와 같다. 이 부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$라는 것은 이차방정식 $8x^2+2x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$가 됨을 의미하므로 이차방정식 근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-\frac{1}{8}$이 된다.

$\therefore\ \left|\frac{1}{\alpha\beta}\right|=8$

도형의 방정식

3

1. 평면좌표
2. 직선의 방정식
3. 원의 방정식
4. 도형의 이동

수악중독

Where Impossible Becomes I'm possible

01 두 점 사이의 거리

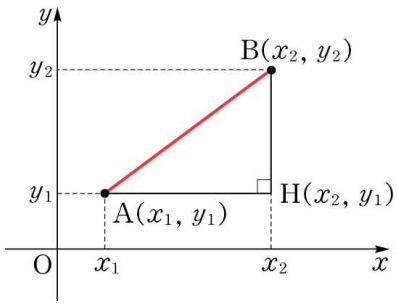
두 점 사이의 거리

1. 수직선 위의 두 점 사이의 거리
   수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는
   $$\overline{AB}=|x_1-x_2|$$
2. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
   좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는
   $$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

▷ 오른쪽 그림에서 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $H(x_2,\ y_1)$에서 두 점 A, B 사이의 거리 $\overline{AB}$는 직각삼각형 ABH의 빗변의 길이와 같다. $\overline{AH}=x_2-x_1$, $BH=y_2-y_1$ 이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$ 에서 $\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



좌표평면 위에 있는 두 점 $A(2,\ -1)$, $B(-2,\ 3)$에서 같은 거리에 있고 x축 위에 있는 점 P의 좌표를 구하시오.

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이다. 이때, 점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라고 하면

$$\overline{AP}^2=(x-2)^2+(-1)^2$$
$$\overline{BP}^2=(x+2)^2+3^2$$

이므로

$$(x-2)^2+1=(x+2)^2+9$$
$$x^2-4x+4+1=x^2+4x+13$$
$$8x=-8 \qquad \therefore\ x=-1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(-1,\ 0)$이다.

$\triangle ABC$에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

이 성립함을 증명하시오.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표축을 잡으면 점 M이 원점이다. 이때 $\triangle ABC$의 세 꼭짓점의 좌표를 각각

$A(a,\ b),\ B(-c,\ 0),\ C(c,\ 0)$

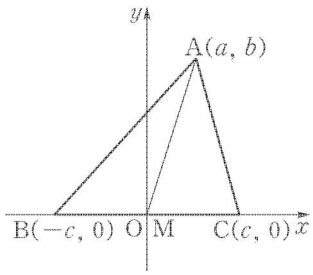
으로 놓으면

$$\begin{aligned}&\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\\ &= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}\\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2)\end{aligned}$$

또 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2,\ \overline{BM}^2 = c^2$이므로

$$2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이 성립한다.



02 선분의 내분점과 외분점

수직선 위에서의 선분의 내분점과 외분점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

(1) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x)$라고 하면

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 $\mathrm{M}(x)$라 하면

$$x=\frac{x_2+x_1}{2}$$

(3) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 외분하는 점을 $\mathrm{P}(x)$라고 하면

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

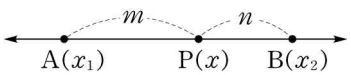
(1) 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$이므로 $x-x_1:x_2-x=m:n$

비례식을 풀면

$m(x_2-x)=n(x-x_1)$

$(m+n)x=mx_2+nx_1$

$\therefore\ x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$



(2) 중점은 $m=n=1$인 경우이므로 $x=\dfrac{x_2+x_1}{2}$

(3) $m>n$이면 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}$는

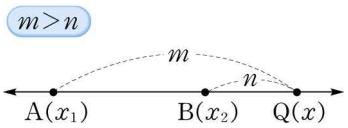
$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$

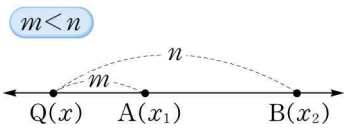
$m<n$이면 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}$는

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$

두 경우 모두 비례식을 풀면

$x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$





수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(4)$에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구하시오.

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면

$$x_1 = \frac{(2\times 4)+(1\times 1)}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x_2 = \frac{(2\times 4)-(1\times 1)}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$$

좌표평면 위에서의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여

(1) $\overline{AB}$ 를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$ 으로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_1}{2},\ \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

(3) $\overline{AB}$를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$ 으로 외분하는 점을 Q라 하면

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

(1) 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라고 하면

$$\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$$

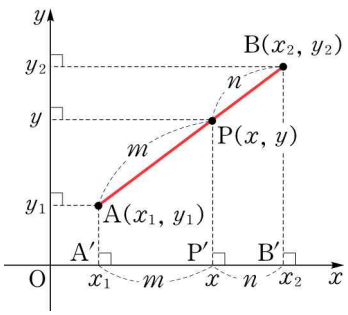
이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이다.

즉 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

이다. 같은 방법으로 점 P의 y좌표를 구하면

$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$



(2) 중점은 $m=n=1$인 경우이므로 $M\left(\dfrac{x_2+x_1}{2},\ \dfrac{y_2+y_1}{2}\right)$

(3) 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, Q 에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, Q′이라고 하면

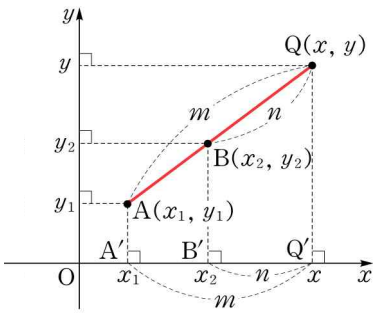
$\overline{A'Q'}:\overline{B'Q'}=\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$ 이므로 점 Q′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 외분하는 점이다. 즉

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다. 같은 방법으로 점 Q의 y좌표를 구하면

$y=\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$이다.

따라서 구하는 점 Q의 좌표는 $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

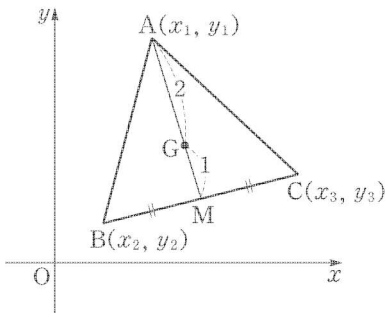


좌표평면 위에 있는 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

변 BC의 중점을 M이라고 하면 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

이다. $\triangle ABC$의 무게중심 $G(x,\ y)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로



$$x=\frac{2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}+1\cdot x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+1\cdot y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

좌표평면 위에 있는 두 점 $A(2,\ 4)$와 $B(-3,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$로 외분하는 점 Q와 $3:1$로 외분하는 점 R의 좌표를 구하시오.

점 Q의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$라고 하면

$$x_1=\frac{1\cdot(-3)-3\cdot 2}{1-3}=\frac{9}{2},\quad y_1=\frac{1\cdot 1-3\cdot 4}{1-3}=\frac{11}{2}$$

따라서 점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{9}{2},\ \frac{11}{2}\right)$이다.

점 R의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$$x_2=\frac{3\cdot(-3)-1\cdot 2}{3-1}=-\frac{11}{2},\quad y_2=\frac{3\cdot 1-1\cdot 4}{3-1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 점 R의 좌표는 $R\left(-\frac{11}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

01 직선의 방정식

기울기와 한 점이 주어지는 경우

기울기가 m 이고 점 (x_1, y_1) 을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

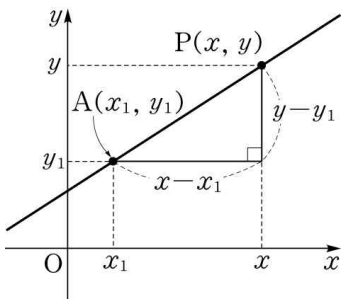
▷ 구하고자 하는 직선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$ (단, $x \neq x_1$)

라고 하면, 직선의 기울기는 $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$이 되고, 이 값은 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

양변에 $x-x_1$을 곱하면

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

또한 위의 방정식은 $x=x_1$일 때도 성립하므로 구하고자 하는 직선의 방정식으로 적합하다.



기울기와 y 절편이 주어지는 경우

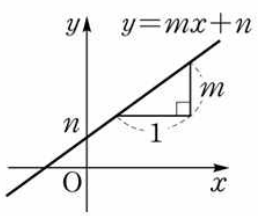
기울기가 m 이고 y 절편이 n 인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx+n$$

▷ y절편 n이 주어졌다는 것은 직선이 한 점 $(0, n)$을 지나는 것을 의미한다. 따라서 기울기가 m이고 점 $(0, n)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$$y-n=m(x-0)$$

$$\therefore\ y=mx+n$$



점 $(1,\ -2)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하시오.

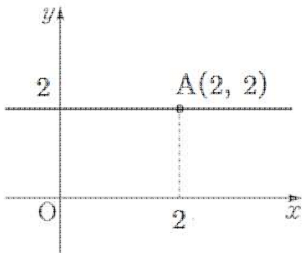
$y-(-2)=3\times(x-1)$ $\therefore y=3x-5$

점 $(2,\ 2)$를 지나고 기울기가 0인 직선의 방정식을 구하시오.

$y-2=0\times(x-2)$

$\therefore\ y=2$

※ 기울기가 0인 직선의 그래프는 x축에 평행하다.
y절편이 b이고, x축에 평행한 직선의 방정식은
$y=b$ 가 된다.



y절편이 5이고 x축에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

$y=5$

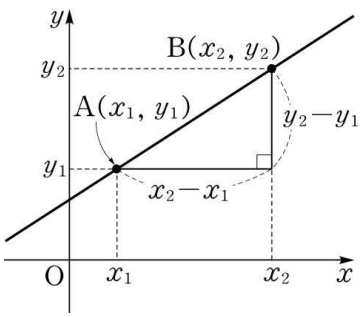
서로 다른 두 점이 주어지는 경우

서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

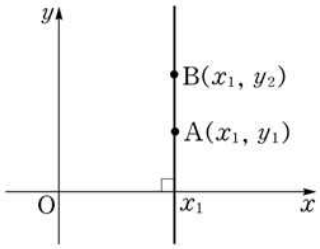
(1) $x_1 \neq x_2$일 때, $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

(2) $x_1 = x_2$일 때, $x = x_1$

(1) $x_1 \neq x_2$일 때 직선의 기울기 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$이고 직선은 점 $A(x_1, y_1)$을 지나기 때문에 구하는 직선의 방정식은 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$



(2) $x_1 = x_2$일 때는 직선 위의 모든 점의 x좌표가 x_1이 되므로 구하는 직선의 방정식은 $x = x_1$이 된다. 이 경우 직선은 y 축에 평행하고, 직선의 x절편 역시 x_1이 된다. 따라서 x 절편이 a이고, y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x = a$ 가 된다.



x 절편과 y 절편이 주어지는 경우

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{단, } ab \neq 0)$$

▷ x절편이 a, y절편이 b라는 것은 두 점 $(a, 0)$과 $(0, b)$가 주어진 것과 같다.

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)$$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{단, } ab \neq 0)$$

두 점 $A(1,\ -2)$, $B(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

직선의 기울기는 $m=\dfrac{4-(-2)}{3-1}=3$, 또한 이 직선은 $A(1,\ -2)$를 지나기 때문에

구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=3\times(x-1)$

$\therefore\ y=3x-5$

x절편이 -3이고 y축에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

$x=-3$

x절편과 y절편이 각각 -2, 3인 직선의 방정식을 구하시오.

$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$ $\qquad\therefore\ y=\dfrac{3}{2}x+3$

직선의 방정식의 일반형

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$) 이 나타내는 도형은 직선이고, $ax+by+c=0$의 꼴을 직선의 방정식의 일반형이라 한다.

▷ 직선의 방정식 $y-y_1=m(x-x_1)$, $x=x_1$은 각각

$$mx-y-mx_1+y_1=0, \quad x-x_1=0$$

으로 변형된다. 이와 같이 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \quad (\text{단, } a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0)$$

꼴로 나타낼 수 있다.

역으로 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \quad (\text{단, } a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0)$$

을 변형하면

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} & (b \neq 0) \\ x=-\dfrac{c}{a} & (b=0) \end{cases}$$

이므로 이는 직선의 방정식이 된다.

직선의 방정식 $3x+4y=5$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 직선의 기울기를 구하시오.

(2) 직선의 x절편, y절편을 각각 구하시오.

(1) 주어진 직선의 방정식은 $4y=-3x+5$

양변을 4로 나누면 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

따라서 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$

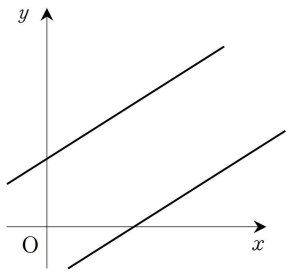
(2) x절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로 $x=\dfrac{5}{3}$

y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이므로 $y=\dfrac{5}{4}$

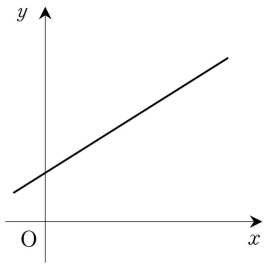
02 두 직선의 위치 관계

두 직선의 위치 관계

(1) 평행

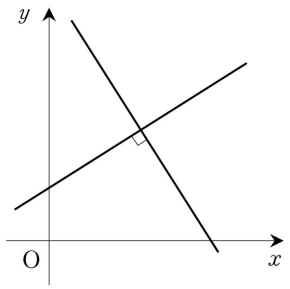


(2) 일치

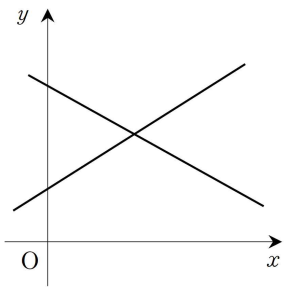


(3) 한 점에서 만남

수직교차



일반교차



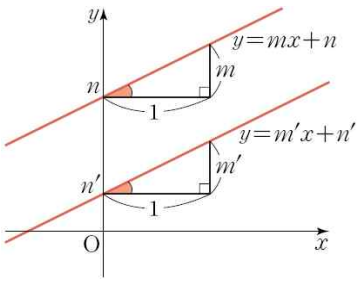
두 직선의 평행 조건

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$이 평행할 필요충분조건은 다음과 같다.

$$m=m',\ n\neq n'$$

▷ 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 평행하기 위해서는 두 직선의 기울기가 같고 y절편은 달라야 한다. 따라서

$$m=m',\ n\neq n'$$



두 직선의 수직 조건

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$이 서로 수직일 필요충분조건은 다음과 같다.

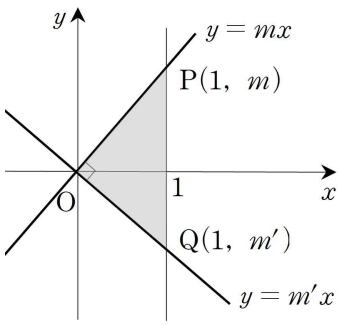
$$mm'=-1$$

▷ 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나고 서로 수직인 두 직선을 $y=mx$, $y=m'x$ 라 하고, 직선 $x=1$ 과 이 두 직선과의 교점을 각각 P,Q 라고 하자.

$\triangle$POQ 에서 $\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 이다. 여기서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=1+m^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2=1+m'^2$, $\overline{\mathrm{PQ}}^2=(m-m')^2$ 이므로

$1+m^2+1+m'^2=m^2-2mm'+m'^2$

$$\therefore mm'=-1$$



다음 두 직선이 평행할 조건을 구하시오.

$ax+by+c=0$ (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

$a'x+b'y+c'=0$ (단, $a'\neq 0$, $b'\neq 0$)

두 직선의 방정식의 기울기와 y절편을 구하기 위해 일반적인 형태로 바꾸면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$이고, 두 직선의 기울기가 같고 y절편이 서로 달라야 하므로

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\quad -\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$$

이것을 변형하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 혹은 $ab'=a'b$, $bc'\neq b'c$로 나타낼 수도 있다.

혹은 x절편이 서로 다르다고 하여 $ab'=a'b$, $ac'\neq a'c$로 나타낼 수도 있다.

다음 두 직선이 수직으로 만날 조건을 구하시오.

$ax+by+c=0$ (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

$a'x+b'y+c'=0$ (단, $a' \neq 0$, $b' \neq 0$)

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 에서 두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ 이다. 이 두 직선이 수직 교차하기 위해서는 $-\frac{a}{b}\times-\frac{a'}{b'}=-1$이다. $\therefore \frac{aa'}{bb'}=-1$ 이고 $aa'=-bb'$

$\therefore aa'+bb'=0$

점 $(3,\ -1)$을 지나고 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

구하고자 하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 $\left(-\frac{1}{3}\right)\times m=-1$ 이므로 $m=3$이다. 따라서 기울기가 3이고 한 점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다. $\therefore y+1=3(x-3)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x-10$ 이다.

조건		$\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$	$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$	연립방정식의 근의 개수
평행		$m=m'$, $n \neq n'$	$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$	근이 없다.(불능)
일치		$m=m'$, $n=n'$	$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$	근이 무수히 많다.(부정)
한 점 교차	수직교차	$mm'=-1$	$aa'+bb'=0$	한 쌍의 근
	일반교차	$m \neq m'$	$\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$	

03 두 직선의 교점을 지나는 직선

두 직선의 교점을 지나는 직선

두 직선 $\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ① \\ a'x+b'y+c'=0 & \cdots ② \end{cases}$ 이 한 점에서 만날 때, 방정식

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \text{ (단, } k\text{는 실수)} \quad \cdots ③$$

은 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식이 된다.

▷ 직선 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$는 x, y에 대한 일차식이므로 직선의 방정식이 된다.

▷ 두 직선 ①, ②의 교점을 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 $x=x_1$, $y=y_1$을 두 직선 ①, ②에 대입하면 등식이 성립한다. 즉,

$$ax_1+by_1+c=0,\ a'x_1+b'y_1+c=0$$

따라서 $x=x_1$, $y=y_1$을 ③에 대입하여도 등식이 성립한다. 즉, 직선 ③은 k의 값에 관계 없이 직선 ①과 ②의 교점을 지난다.

▷ 직선 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$가 직선 $ax+by+c=0$을 나타낼 수는 있지만, 직선 $a'x+b'y+c'=0$을 나타낼 수는 없다.

두 직선 $x+2y-1=0$, $3x-y+2=0$의 교점과 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x+2y-1)+k(3x-y+2)=0 \quad \cdots ①$$

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $x=1$, $y=1$을 ①에 대입하면

$$2+4k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x-5y+4=0$이다.

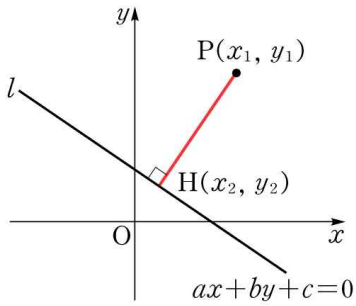
04 점과 직선 사이의 거리

점과 직선 사이의 거리

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

▷ 점 P와 직선 $l : ax+by+c=0\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$ 사이의 거리는 오른쪽 그림에서와 같이 선분 $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이와 같다.
(단, 점 H는 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발)



이때, 직선 l의 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$이므로 직선 PH의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$이다. 또한 두 점 P, H사이의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b}{a}$$

$\therefore \dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}=k$ 라고 하면 $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=|k|\sqrt{a^2+b^2}$

또한 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ 가 l 위의 점이고 $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$ 이므로

$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$ $\qquad\qquad$ $\therefore k=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

$$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=|k|\sqrt{a^2+b^2}=\left|-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right|\times\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

점 $(2,\ -1)$을 지나고 원점에서의 거리가 1인 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 이 직선의 방정식은

$$y+1=m(x-2) \qquad \therefore\ mx-y-2m-1=0$$

원점과 이 직선 사이의 거리는 $\dfrac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$\therefore\ |-2m-1|=\sqrt{m^2+1}$ 이고 양변을 제곱하면

$$(-2m-1)^2=m^2+1 \qquad 3m^2+4m=0$$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=-\dfrac{4}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=-1,\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

평행한 두 직선 $2x-y+1=0$과 $2x-y-1=0$ 사이의 거리를 구하시오.

직선 $2x-y+1=0$ 위에 있는 점 $(0,1)$과 직선 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같다. 따라서 구하는 거리는

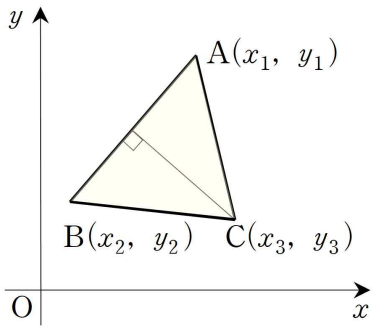
$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

세 꼭짓점의 좌표가 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 인 삼각형 ABC의 넓이

$$\frac{1}{2}\left|(x_1-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2\right|$$

▷ 오른쪽 그림에서



$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

또, 직선 AB의 방정식은

$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$

이를 정리하면

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$

결국 변 AB를 밑변으로 생각하면 높이는 선분 $\overline{CH}$의 길이 즉, 꼭짓점 C와 직선 AB사이의 거리가 된다.

$$\overline{CH}=\frac{|(y_2-y_1)x_3-(x_2-x_1)y_3-(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$\therefore$ △ABC의 넓이

$$=\overline{AB}\times\overline{CH}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\frac{|(y_2-y_1)x_3-(x_2-x_1)y_3-(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2\right|$$

세 점 $A(9,\ 8)$, $B(1,\ 2)$, $C(7,\ 3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.

$\therefore$ △ABC의 넓이 $=\frac{1}{2}|(9-1)\times3+(1-7)\times8+(7-9)\times2|$

$=\frac{1}{2}\left|24-48-4\right|=\frac{1}{2}\times28=14$

01 원의 방정식

원의 정의

평면에서 한 정점으로부터 거리가 일정한 점들의 집합으로 정의되는 평면도형을 원이라 한다. 이때, 정점을 원의 중심, 일정한 거리를 원의 반지름이라고 한다.

원의 방정식

(1) 점 $(a,\ b)$ 가 중심이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

(2) 원점이 중심이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식

$$x^2+y^2=r^2$$

▷ 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 를 중심으로 하고 반지름이 r 인 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라고 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$ 로부터

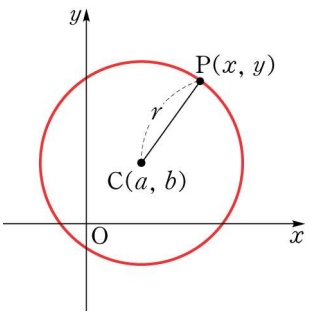
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

양변을 제곱하면

$$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $a=0,\ b=0$이므로

$$x^2+y^2=r^2$$



중심이 $(1,\ 2)$이고 점 $(3,\ 3)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

원의 반지름을 r이라고 하면 r은 중심 $(1,\ 2)$ 에서 점 $(3,\ 3)$ 까지의 거리와 같으므로 $r=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$ 이 된다.
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이다.

두 점 $(-2,\ -1)$, $(6,\ 5)$를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라고 하면 점 C는 두 점 $(-2,\ -1)$, $(6,\ 5)$의 중점이므로

$a=\dfrac{-2+6}{2}=2$, $b=\dfrac{-1+5}{2}=2$

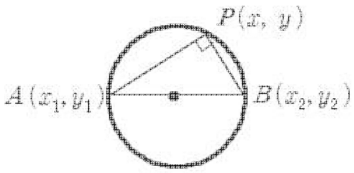
따라서 원의 중심 $\mathrm{C}(2,\ 2)$가 되고, 원의 반지름을 r이라고 하면 r은 중심에서 점 $(6,\ 5)$ 사이의 거리이므로

$$r=\sqrt{(6-2)^2+(5-2)^2}=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-2)^2=25$

(다른 풀이)

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하자. 선분 AB는 원의 지름이므로 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$가 된다. 따라서 직선 AP의 기울기와 직선 BP의 기울기의 곱은 -1이 되어야 한다.



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$$

$$(y-y_1)(y-y_2)=-(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\therefore (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+2)(x-6)+(y+1)(y-5)=0$이다.

원의 방정식의 일반형

이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (단, $A^2+B^2-4C>0$) 는 중심이 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$ 이고 반지름이 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 인 원을 나타낸다.

▷ 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이다. 따라서 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad (\text{단, } A,\ B,\ C\text{는 실수}) \cdots ①$$

꼴로 나타낼 수 있다.

역으로 방정식 ①을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

이므로 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 ①은 중심이 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 인 원을 나타낸다.

이때, $A^2+B^2-4C=0$이면 방정식 ①은 한 점을 나타내고, $A^2+B^2-4C<0$이면 방정식 ①을 만족하는 점 $(x,\ y)$는 존재하지 않으므로 좌표평면 위에 나타나지 않는다.

▷ $x,\ y$ 에 대한 이차식에서 $x^2,\ y^2$ 의 계수가 같고 xy 항이 없을 때, 이 이차식은 원의 방정식이 된다.

방정식 $x^2+y^2-6x+8y-11=0$이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

주어진 방정식을 변형하여 완전제곱꼴로 나타내면

$$(x^2-6x)+(y^2+8y)-11=0$$

$$(x^2-6x+9-9)+(y^2+8y+16-16)-11=0$$

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16-11=0$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=36$$

따라서 방정식 $x^2+y^2-6x+8y-11=0$가 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -4)$이고 반지름의 길이는 6이다.

세 점 $(2,\ 1)$, $(7,\ 0)$, $(1,\ -4)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

으로 놓자. 이 원은 세 점 $(2,\ 1)$, $(7,\ 0)$, $(1,\ -4)$을 지나므로 이들의 좌표를 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$$2A+B+C=-5,\ 7A+C=-49,\ A-4B+C=-17$$

위 세 식을 연립하여 풀면

$$A=-8,\quad B=4,\quad C=7$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-8x+4y+7=0$$

두 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(-5,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $2:3$인 점 P의 집합이 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = (x-5)^2 + y^2$,

$\overline{\mathrm{BP}}^2 = (x+5)^2 + y^2$

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 3$이므로 $3\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

양변을 제곱하면 $9\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

$\therefore\ 9\{(x-5)^2 + y^2\} = 4\{(x+5)^2 + y^2\}$

이 식을 정리하면

$(x-13)^2 + y^2 = 12^2$

따라서 구하는 도형은 중심이 $(13,\ 0)$이고 반지름의 길이가 12인 원이다.

(다른 풀이)

좌표평면 위에 정점 A, B에서의 거리의 비가 $m:n$ (단, $m \neq n$)인 점들의 집합은 점 A, B를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원이 된다. BC 200년경 그리스의 수학자 아폴로니오스가 발견하였으므로 그의 이름을 기념하여 아폴로니오스의 원으로 명명되었다.

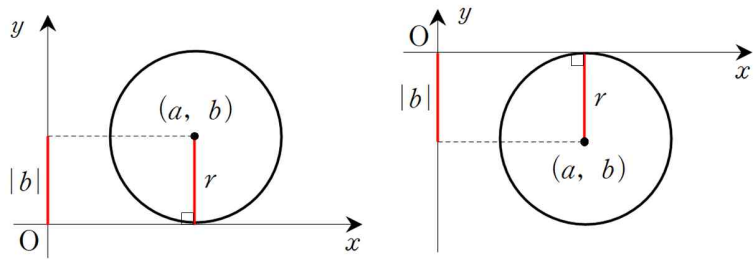
두 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(-5,\ 0)$를 $2:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점은 각각 $(1,\ 0)$, $(25,\ 0)$이다. 따라서 두 점 $(1,\ 0)$, $(25,\ 0)$를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은 $(x-1)(x-25) + y^2 = 0$이 된다.

02 축에 접하는 원의 방정식

x축에 접하는 원의 방정식

중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 반지름은 $|b|$와 같다.

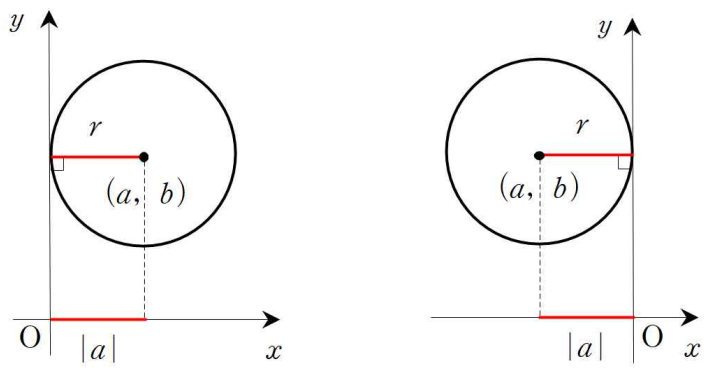
$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$



y축에 접하는 원의 방정식

중심이 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 반지름은 $|a|$와 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$



x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식

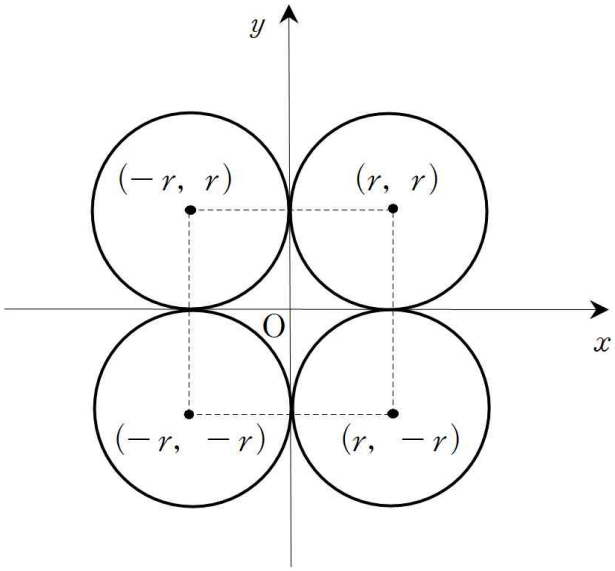
반지름이 r이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표는 원의 중심이 놓이는 사분면에 따라 다음과 같이 네 가지로 나누어 볼 수 있다.

(1) 제1사분면 : 중심의 좌표 $(r,\ r)$ ⇨ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

(2) 제2사분면 : 중심의 좌표 $(-r,\ r)$ ⇨ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

(3) 제3사분면 : 중심의 좌표 $(-r,\ -r)$ ⇨ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

(4) 제4사분면 : 중심의 좌표 $(r,\ -r)$ ⇨ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$



두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ a)$를 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. 이 원이 y축에 접하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

y축에 접하는 원은

반지름의 길이 = | 중심의 x좌표 |

를 만족한다. 원의 중심의 x좌표는 $\frac{0+2}{2}=1$ 이므로 이 원의 반지름 역시 1이다.

따라서 원의 지름 $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되어야 하므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=4$, 즉 $4+(a-3)^2=4$ 에서 $a=3$이 됨을 알 수 있다.

점 $(1,\ 1)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오.

점 $(1,\ 1)$은 제1사분면의 점이므로 구하는 원의 반지름을 r이라고 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$이 된다. 또한 이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$(1-r)^2+(1-r)^2=r^2$

$2(r^2-2r+1)=r^2$

$\therefore\ r^2-4r+2=0$

이 방정식의 두 근을 r_1, r_2라 하자.

$r_1+r_2=4,\ r_1r_2=2,$

$(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2-4r_1r_2=16-8=8$

따라서 구하는 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(r_1-r_2)^2+(r_1-r_2)^2}=\sqrt{2(r_1-r_2)^2}=\sqrt{2\times 8}=4$$

가 된다.

03 두 원의 교점을 지나는 원

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 & \cdots ② \end{cases}$ 의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0 \quad (\text{단, } k \neq -1\text{인 실수}) \quad \cdots ③$$

▷ 두 원 ①, ②의 교점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라고 하면 두 원의 방정식의 x, y 대신 각각 x_1, y_1 혹은 x_2, y_2를 대입해도 등식이 성립한다. 따라서 방정식 ③에 x, y 대신 각각 x_1, y_1 혹은 x_2, y_2를 대입해도 등식이 성립한다. 또한 방정식 ③은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 모두 $1+k$ 으로 같고, xy항이 존재하지 않으므로 원의 방정식이 된다.
결과적으로 방정식 ③은 원의 방정식 ①과 ②의 교점을 지나는 원의 방정식이 된다.

▷ $k=0$ 이면 원의 방정식은 ③은 원의 방정식 ①과 같다. 하지만 k가 어떤 값을 갖더라도 원의 방정식이 ③이 ②와 같은 원을 나타내지는 못한다.

▷ $k=-1$ 이면 방정식 ③ 은 x, y에 대한 일차식이 되어 직선의 방정식이 된다. 즉, 두 원 ①과 ②의 교점을 지나는 직선의 방정식(공통현의 방정식)이 된다.

두 원 $x^2+y^2+5x+y-6=0$, $x^2+y^2-x-y-2=0$의 교점과 점 $(4,\ 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+5x+y-6+k(x^2+y^2-x-y-2)=0$$

이다. 이 원이 점 $(4,\ 2)$를 지나야 하므로

$$4^2+2^2+20+2-6+k(4^2+2^2-4-2-2)=0$$

$$36+12k=0 \qquad \therefore k=-3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+5x+y-6-3(x^2+y^2-x-y-2)=0$$

$$x^2+y^2-4x-2y=0$$

두 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=26$, $(x-3)^2+y^2=16$ 의 두 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

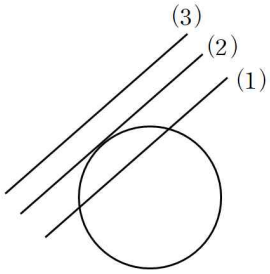
$$(x+2)^2+(y-5)^2-26-\{(x-3)^2+y^2-16\}=0$$

따라서 $x-y+1=0$이 된다.

04 원과 직선의 위치 관계

원과 직선의 위치 관계

원과 직선의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같이 세 가지로 생각할 수 있다.



(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 원과 직선이 한 점에서 만난다. (접한다.)
(3) 원과 직선이 만나지 않는다.

원과 직선의 위치 관계 파악 Ⅰ

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,

(1) $D>0$ ⇔ 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D=0$ ⇔ 원과 직선이 한 점에서 만난다. 즉, 접한다.
(3) $D<0$ ⇔ 원과 직선이 만나지 않는다.

▷ 원과 직선의 방정식을 각각

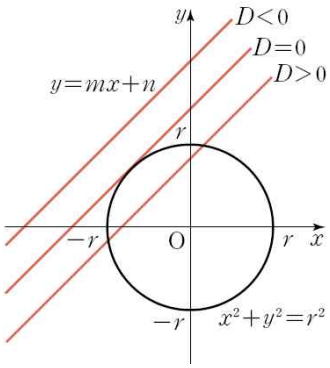
$x^2+y^2=r^2$ ⋯ ①

$y=mx+n$ ⋯ ②

이라고 할 때, ②를 ①에 대입하여 정 정리하면

$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ ⋯ ③

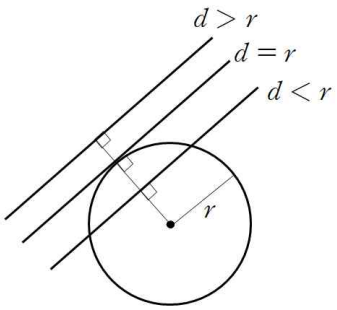
원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ③의 실근의 개수와 같으므로 ③의 판별식 $D=(mn)^2-(m^2+1)(n^2-r^2)$ 로부터 실근의 개수 즉, 교점의 개수를 알아낼 수 있다.



원과 직선의 위치 관계 파악 II

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

① $d < r$ ⇔ 두 점에서 만남
② $d = r$ ⇔ 한 점에서 만남(접함)
③ $d > r$ ⇔ 만나지 않음



원 $x^2 + y^2 = 16$과 직선 $y = 2x + 5$의 위치 관계를 파악하시오.

$y = 2x + 5$를 $x^2 + y^2 = 16$에 대입하면

$$x^2 + (2x+5)^2 = 16$$

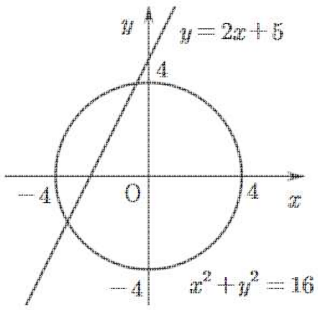
이 식을 정리하면

$$5x^2 + 20x + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식 D에서

$$\frac{D}{4} = 10^2 - 5 \times 9 = 55 > 0$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



(다른 풀이)

원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선까지의 거리 d, 원의 반지름을 r이라고 하면

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad r = 4$$

$d < r$ 이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

원의 중심 $(1,\ -2)$로부터 직선 $x-y+k=0$ 까지의 거리를 d라고 하면

$d=\dfrac{|1-(-2)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$가 반지름 $2\sqrt{2}$보다 작을 경우 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나게 된다.

따라서 $\dfrac{|k+3|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$ 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면 $|k+3|<4$

$-4<k+3<4$ $\therefore -7<k<1$

05 원의 접선의 방정식

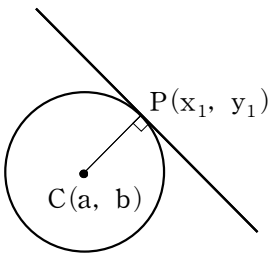
접점이 주어지는 경우

(1) 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식

$$x_1x+y_1y=r^2$$



(1) 원의 중심을 C, 접점을 P라고 하면, 직선 CP와 접선은 수직으로 만난다. 이때, 직선 CP의 기울기가 $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$ 이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$가 된다. 또한 접선은 점 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$을 지나므로 구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$ 이 되고, 양변에 y_1-b를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$$

다시 양변에 r^2을 더해주면

$$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)+r^2=r^2$$

$r^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$과 같으므로 좌변의 r^2 대신 $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$을 대입하면

$$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)+(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$

$$(x_1-a)(x-x_1+x_1-a)+(y_1-b)(y-y_1+y_1-b)=r^2$$

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

을 얻을 수 있다.

$x_1=a$인 경우 위 식으로부터 $y=b+\dfrac{r^2}{y_1-b}$를 얻을 수 있고, $y_1=b$인 경우에도 위 식으로부터 $x=a+\dfrac{r^2}{x_1-a}$를 얻을 수 있으므로 위 식을 점 $(x_1,\ y_1)$의 위치에 관계없이 사용할 수 있다.

(2) (1)에서 $a=b=0$인 경우를 생각하면 된다.

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(5,\ 5)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

원의 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 2)$이므로 직선 CP의 기울기는 $\frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$

점 $\mathrm{P}(5,\ 5)$에서의 접선은 직선 CP와 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

따라서 구하는 접선은 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 한 점 $(5,\ 5)$를 지나는 직선의

방정식이다. 따라서 접선의 방정식은 $y-5=-\frac{4}{3}(x-5)$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{35}{3}$

(다른 풀이)

$(5-1)(x-1)+(5-2)(y-2)=25$

$4x-4+3y-6=25$

$3y=-4x+35$

$\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{35}{3}$

원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$, $\mathrm{Q}(5,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은 $3x+4y=25$

점 $\mathrm{Q}(5,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $5\cdot x+0\cdot y=25$ $\quad\therefore\ x=5$

기울기가 주어지는 경우

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

▷ 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면 원의 중심 $(0,\ 0)$으로부터 접선 $y=mx+n$ 까지의 거리가 원의 반지름 r과 같아야 한다.

$\therefore \dfrac{|m\cdot 0-0+n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$ 이고 $|n|=r\sqrt{m^2+1}$ 즉, $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$

결국 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이다.

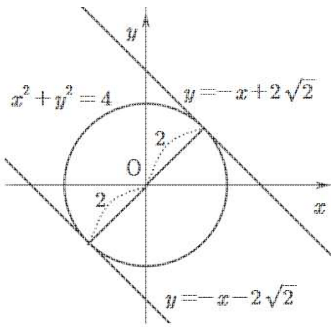
원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식을 구하시오.

접선의 방정식을 $y=-x+n$이라고 하면 원의 중심 $(0,\ 0)$으로부터 접선까지의 거리가 반지름 2와 같아야 한다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}}=2 \quad \therefore n=\pm 2\sqrt{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=-x\pm 2\sqrt{2}$$



원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식을 구하시오.

접선의 방정식을 $y=-x+n$이라고 하면 원의 중심 $(2,\ 3)$으로부터 접선까지의 거리가 반지름 4와 같아야 한다.

$$\frac{|2+3-n|}{\sqrt{2}}=4 \quad \therefore n=5\pm 4\sqrt{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=-x+5\pm 4\sqrt{2}$$

원 밖의 한 점이 주어지는 경우

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 이 원에 그은 접선의 방정식을 구할 때는 접선의 기울기를 m이라 놓고 원의 중심 $(a,\ b)$에서 접선 $y-y_1=m(x-x_1)$까지의 거리가 반지름 r과 같다는 조건을 이용한다.

원 $x^2+y^2=5$ 에 접하고, 점 $(3,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

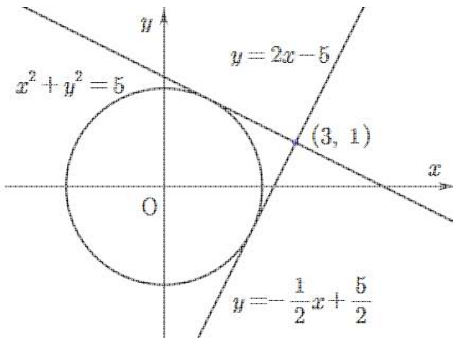
점 $(3,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선을 $y-1=m(x-3)$이라고 하자. 이 직선이 원 $x^2+y^2=5$에 접해야 하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $mx-y-3m+1=0$ 까지의 거리가 반지름 $\sqrt{5}$와 같아야 한다.

$$\therefore\ \frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

양변에 $\sqrt{m^2+1}$을 곱하고 제곱해주면

$$9m^2-6m+1=5m^2+5$$
$$4m^2-6m-4=0$$
$$2(2m+1)(m-2)=0$$
$$\therefore\ m=2 \text{ 또는 } m=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-5$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$



원과 직선의 활용 예제

원 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$이 직선 $3x+4y+k=0$에 의해 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{3}$이 되도록 하는 k의 값을 구하시오.

주어진 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$가 된다.
원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 1)$에서 직선 $3x+4y+k=0$에 내린 수선의 발을 H, 원과 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하면 $\triangle\mathrm{CAH}$ 와 $\triangle\mathrm{CBH}$는 합동인 직각삼각형이 된다. $\therefore \overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{HB}}=\sqrt{3}$
또한 직각삼각형 CAH에서 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{HA}}^2}$ 이 성립한다.
이때, $\overline{\mathrm{CA}}$는 원의 반지름 $r=2$와 같고, $\overline{\mathrm{CH}}$는 원의 중심에서 직선까지의 거리 $d=\dfrac{|3+4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$와 같으므로

$$\frac{|3+4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}^2\right)}=1$$

$$|k+7|=5 \qquad \therefore\ k=-2 \text{ 또는 } k=-12$$

좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ -1)$과 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최댓값을 구하시오.

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 삼각형의 밑변으로 보면 점 P에서 직선 AB까지의 거리가 최대일 때, 삼각형 ABP의 넓이도 최대가 된다.
원주 위를 움직이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

(원의 중심으로부터 직선까지의 거리) + (원의 반지름)

과 같다.
직선 AB의 방정식은 $x+y-2=0$이고 원의 중심은 $(0,\ 0)$이므로 삼각형 ABP 넓이의 최댓값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{(3-1)^2+(-1-1)^2}\times\left(\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}+1\right)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$$

01 평행이동

평행이동

점이나 도형을 모양과 크기를 유지하면서 회전시키지 않은 상태로 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라 한다.

점의 평행이동

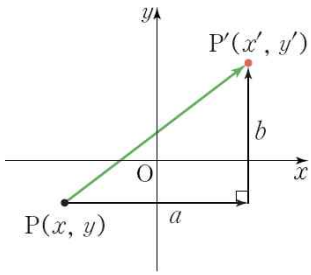
좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'는

$$\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$$

▷ 좌표평면에서의 점의 평행이동은 x축 혹은 y축에 평행한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 말한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$라고 하면

$$x'=x+a,\ y'=y+b$$

가 된다. 따라서 점 P'의 좌표는 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$가 된다.



점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표가 $\mathrm{P}'(5,\ -1)$이었다. 점 $\mathrm{Q}(2,\ 9)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 Q'의 좌표를 구하시오.

주어진 조건으로부터

$$1+a=5,\ 3+b=-1$$

$$\therefore\ a=4,\ b=-4$$

따라서 $\mathrm{Q}(2,\ 9)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 Q'의 좌표는 $\mathrm{Q}'(6,\ 5)$이다.

도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

▷ 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위에 있는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

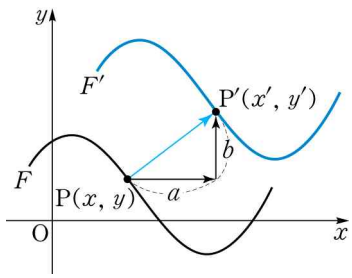
즉, $x=x'-a,\ y=y'-b$이다. 그림에 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족하므로

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

이 성립한다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

을 만족한다.



직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하시오.

직선 $y=2x$ 위의 임의의 점 $(p,\ q)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $(p+2,\ q-1)$이 된다. 이때 $X=p+2,\ Y=q-1$이라고 하고 X와 Y의 관계식을 찾으면 원하는 직선의 방정식을 얻을 수 있다.
$p,\ q$사이에 $q=2p$가 성립하고, $p=X-2,\ q=Y+1$이므로

$$Y+1=2(X-2)\ \text{즉,}\ Y=2X-5$$

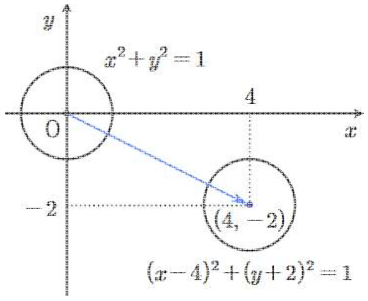
가 성립한다. 결국 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-5$가 된다.

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$에 x 대신 $x-4$, y 대신 $y+2$를 대입한

$$(x-4)^2+(y+2)^2=1$$

이다.



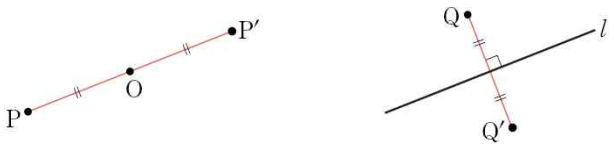
원의 경우 평행이동을 하여도 반지름이 변하지 않으므로 단순히 중심만 평행이동을 시켜도 평행이동한 원의 방정식을 얻을 수 있다. 원 $x^2+y^2=1$의 중심이 $(0,\ 0)$이고 이를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이 $(4,\ -2)$이므로 구하는 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$가 된다.

02 대칭이동

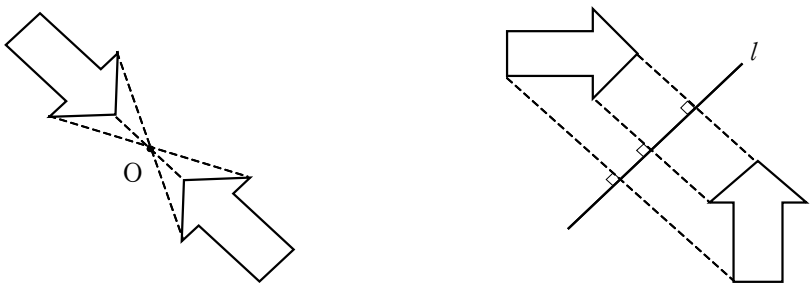
대칭이동

점이나 도형을 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 점이나 도형으로 이동하는 것을 대칭이동이라 한다.

▷ 점 P를 점 O에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라고 하면 세 점 P, O, P′은 한 직선 위에 있고 $\overline{OP}=\overline{OP'}$이다. 또, 점 Q를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라고 하면 직선 l은 선분 QQ′을 수직이등분한다.



▷ 도형은 점들이 모여서 이루어지므로 도형 위의 모든 점들을 대칭이동시키는 것으로 대칭이동한 도형을 얻을 수 있다.

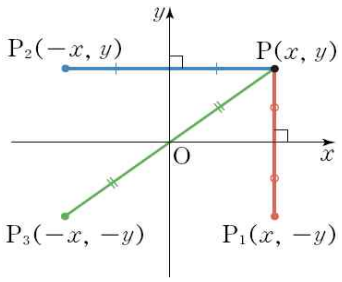


점의 대칭이동

좌표평면 위에 있는 점 $P(x, y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P_1, P_2, P_3라고 하면

$$P_1(x, -y), \quad P_2(-x, y), \quad P_3(-x, -y)$$

▷ 점 P를 x축에 대해서 대칭이동한 점을 P_1이라고 하면 P와 P_1의 중점은 x축 위에 있어야 하고, 두 점을 연결하는 직선은 x축과 수직이어야 한다. 따라서 오른쪽 그림에서와 같이 점 P의 x좌표는 바꾸지 않고, y좌표의 부호가 바꾸어서 대칭점 P_1을 찾을 수 있다. 같은 방법으로 y축 대칭인 경우는 점 P의 x좌표의 부호를 바꾸고 y좌표의 부호는 그대로 유지하여 대칭점 P_2를 찾을 수 있다. 원점 대칭의 경우 점 P와 그 대칭점 P_3의 중점이 원점이 되어야 하므로 점 P의 x좌표와 y좌표의 부호를 모두 바꿈으로써 대칭점 P_3를 찾을 수 있다.



좌표평면 위의 점 $(-2, 5)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 구하시오.

점 $(-2, 5)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$$(-2, -5), \quad (2, 5), \quad (2, -5)$$

도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

(1) x축에 대하여 대칭이동 : $f(x, -y)=0$

(2) y축에 대하여 대칭이동 : $f(-x, y)=0$

(3) 원점에 대하여 대칭이동 : $f(-x, -y)=0$

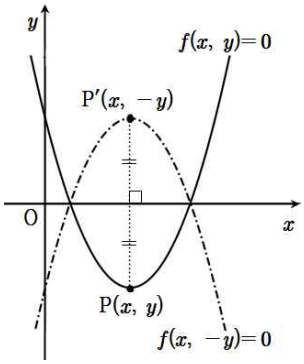
▷ 도형 $f(x, y)=0$ 위에 있는 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면 $x'=x$, $y'=-y$이므로 $x=x'$, $y=-y'$이다. 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 방정식 $f(x, y)=0$을 만족하므로

$$f(x', -y')=0$$

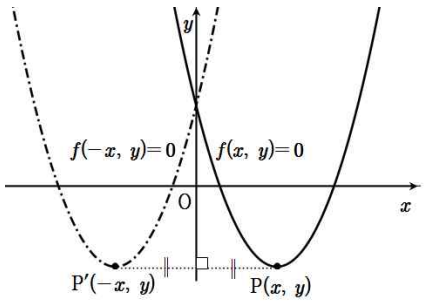
이 성립한다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식 $f(x, -y)=0$을 만족한다. 즉, 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$이다.
마찬가지 방법으로 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축과 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

$$f(-x, y)=0, \quad f(-x, -y)=0$$

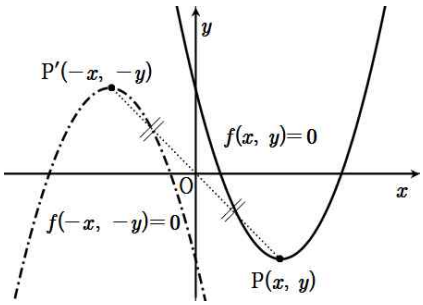
임을 알 수 있다.



[도형의 x축 대칭이동]



[도형의 y축 대칭이동]



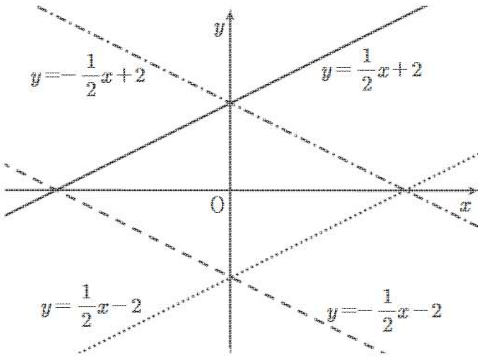
[도형의 원점 대칭이동]

직선 $y=\frac{1}{2}x+2$를 x축, y축, 원점에 대해서 대칭이동시킨 직선의 방정식을 각각 구하시오.

x축 대칭이동 : $-y=\frac{1}{2}x+2$ $\quad\therefore\ y=-\frac{1}{2}x-2$

y축 대칭이동 : $y=-\frac{1}{2}x+2$

원점 대칭이동 : $-y=-\frac{1}{2}x+2$ $\quad\therefore\ y=\frac{1}{2}x-2$

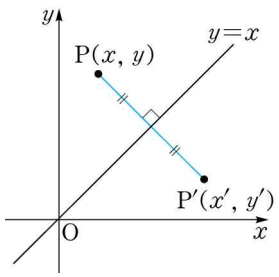


직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 P'는

$$\mathrm{P}'(y,\ x)$$

▷ 직선에 대한 대칭이동은 수직이등분이 된다는 특징이 있다. 즉, 직선 PP'의 기울기는 -1이 되어야 하고, 점 P와 P' 의 중점은 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.



첫째, 직선 PP'의 기울기는 $\dfrac{y'-y}{x'-x}$이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-1 \quad \cdots ①$$

이 성립하고, 둘째, $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점이 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이고 이 점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로

$$\frac{x+x'}{2}=\frac{y+y'}{2} \quad \cdots ②$$

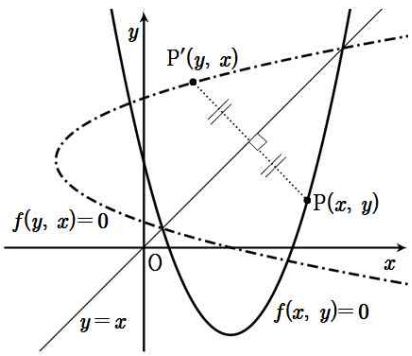
가 성립한다. ①, ②에서 $x'=y$, $y'=x$이므로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 P'좌표는 $\mathrm{P}'(y,\ x)$이다.

직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y,\ x)=0$$

▷ 오른쪽 그림과 같이 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$라고 하면 $x=y'$, $y=x'$가 되고, 이를 $f(x,\ y)=0$에 대입하면 $f(y,\ x)=0$을 얻는다.
따라서 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이다.



직선 $y=2x+4$를 $y=x$에 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

이 문제는 순서대로 대칭이동과 평행이동을 시켜 원하는 도형의 방정식을 얻을 수 있다.
직선 $y=2x+4$를 $y=x$에 대칭이동하면 $x=2y+4$가 되고, 이를 다시 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $(x-1)=2(y+2)+4$가 된다. 따라서 구하는 도형의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$가 된다.

대칭이동 활용 예제

두 점 $A(0,\ 5)$, $B(6,\ 3)$이 있다. x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'라 하자. 점 P가 x축 위를 움직이는 점이므로 점 P의 위치에 관계없이 $\overline{PB}=\overline{PB'}$가 성립한다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$가 되고, $\overline{AP}+\overline{PB'}$의 최솟값은 선분 $\overline{AB'}$의 길이와 같다. 따라서 구하는 최솟값은 두 점 $A(0,\ 5)$, $B'(6,\ -3)$ 사이의 거리가 된다.

$$\therefore\ \sqrt{(6-0)^2+(-3-5)^2}=10$$

직선 $3x-2y+1=0$을 점 $(6,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하시오.

점 $(x,\ y)$를 점 $(6,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$라고 하면 두 점 $(x,\ y)$와 $(x',\ y')$의 중점이 $(6,\ 3)$이 되어야 한다.

$$\frac{x+x'}{2}=6,\quad \frac{y+y'}{2}=3$$

따라서 $\begin{cases} x=12-x' \\ y=6-y' \end{cases}$ 가 되고, 이것을 $3x-2y+1=0$에 대입하면

$$3(12-x')-2(6-y')+1=0$$

이 된다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{25}{2}$$

좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=8$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동 시켰더니 원 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ 이 되었다. $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

대칭이동한 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면 $(x-4)^2+(y-2)^2=20-c$가 된다. 대칭이동 후에도 원의 반지름은 변하지 않기 때문에 $20-c=8$에서 $c=12$임을 알 수 있다. 또한 직선 $y=ax+b$는 두 원의 중심 $(0,\ 0)$과 $(4,\ 2)$의 수직이등분선이 되어야 한다. 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$이므로 $a=-2$가 된다. 또한 이 직선이 두 원의 중점 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로 $b=5$가 된다.
따라서 $a+b+c=-2+5+12=15$이다.